# 1つの解がわかっている場合の方程式の新しい解き方について

仁平（にへい） 政一（まさかず）

## §1. はじめに

このノートでは，方程式の１つの解がわかっているとき，他の解の求め方の新しい方法について述べる。最初に，自明な事実を補題として与えよう。

**補題**　関数 $f(x)$ は実数 $R$ 上の連続な実数値関数とし，関数 $f(x)$ はある１つの零点 $\alpha$ を持つものとする。このとき，もし $y$ を変数とする関数 $f(y+\alpha)$ が，零点 $y_1$ を持つならば，$x_2=y_1+\alpha$ は関数 $f(x)$ の零点である。

**(証明)**　$y_1$ は関数 $f(y+\alpha)$ の零点であるから，明らかに $f(y_1+\alpha)=0$ である。よって，

$f(x_2)=f(y_1+\alpha)=0$　このことは，$x_2$ が関数 $f(x)$ の零点であることを示している。■

## §2. 補題の応用例

ここで，補題の応用例を与えよう。

**例題１**　次の三角方程式を解け。

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$$

**(解答)**　$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$　とおくと，$x=\frac{\pi}{3}$ が $f(x)$ の零点であることがわかる。

ここで，$f\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=\sin y+\cos(2y+\pi)+1$ の零点を求めよう。$\cos(2y+\pi)=-\cos 2y$ であるから，$f\left(y+\frac{\pi}{3}\right)$ の零点を求めるためには，方程式

$$\sin y-\cos 2y+1=0$$

を解けばよい。$\cos 2y=1-2\sin^2 y$ であることに注意すれば，上の式は

$$\sin y(1+2\sin y)=0$$

となる。この式より $y=n\pi,\ n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}$ を得る。よって，求める解は補題から，

$$x=\frac{\pi}{3}+n\pi,\ \left(n+\frac{1}{3}\right)\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}$$

である。ただし，$n$ は整数とする。

## §3. 定理１の紹介

**定理１**　実数を係数とする $n$ 次代数方程式 $f(x)=0$ の１つの実数解を $\alpha$ とする。このとき，$(n-1)$ 次方程式

$$f^{(n)}(\alpha)y^{n-1}+nf^{(n-1)}(\alpha)y^{n-2}+n(n-1)f^{(n-2)}(\alpha)y^{n-3}+\cdots+n!\,f^{(1)}(\alpha)=0$$

の解を $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1}$ とすると，

$$x_2=y_1+\alpha,\ x_3=y_2+\alpha,\ \cdots,\ x_n=y_{n-1}+\alpha$$

は，方程式 $f(x)=0$ の解である。ここに，$f^{(j)}(x)$ は関数 $f(x)$ の第 $j$ 次導関数を意味する。

定理１の証明に入る前に，この定理を用いて，次の３次方程式を解いてみよう。

$$x^3-3x^2+6x-4=0$$

$x=1$ が解であることは，すぐにわかる。そこで，

$$f(x)=x^3-3x^2+6x-4$$

とおくと，$f'(x)=3x^2-6x+6$，$f''(x)=6x-6$

$f^{(3)}(x)=6$ であるから，$f'(1)=3$，$f''(1)=0$，$f^{(3)}(1)=6$　よって，定理１より

$$6y^2+6\cdot 3=0$$

を得る。これを解くと，$y=\pm\sqrt{3}i$

したがって，求める解は $1$，$1\pm\sqrt{3}i$ である。

**(定理１の証明)**　$n$ 次方程式 $f(x)=0$ の１つの実数解を $\alpha$ とする。このとき，$f(y+\alpha)=0$ の任意の１つの解を $y_j$ とすると，補題より，$y_j+\alpha$ は $f(x)=0$ の解である。さて，$f(x)$ は多項式であるか

ら，何回でも微分可能である。ここで，$f(\alpha+y)$ にテイラーの定理を適用すると

$$f(\alpha+y)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}y+\frac{f''(\alpha)}{2!}y^2+\cdots+$$

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}y^n+\frac{f^{(n+1)}(\alpha+\theta y)}{(n+1)!}y^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

が得られる。ところで，$f(\alpha)=0$ および $f^{(n+1)}(x)=0$ であるから，$f(y+\alpha)=0$ とすると

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}y^n+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}y^{n-1}+\cdots+f'(\alpha)y=0 \quad \cdots\cdots①$$

となる。$y\neq 0$ と仮定してよいから，①の両辺を $y$ で割り，$n!$ を掛けると

$$f^{(n)}(\alpha)y^{n-1}+nf^{(n-1)}(\alpha)y^{n-2}+\cdots+n!f'(\alpha)=0 \quad \cdots②$$

を得る。よって，②の解を $y_j\,(1\leqq j\leqq n-1)$ とおくと，$x_{j+1}=\alpha+y_j\,(1\leqq j\leqq n-1)$ は，$f(x)=0$ の解である。これで定理の証明は完了した。■

## §4. 定理１の応用例

ここで，応用例を１つ与えよう。

> **例題２**　実数を係数とする３次方程式 $x^3-3p^2x+2p=0$ が重解を持つように定数 $p$ の値を定め，そのときの重解を求めよ。

**(解答)**　重解を $\alpha$ とし，$f(x)=x^3-3p^2x+2p$ とおく。このとき，$\alpha$ は実数で，$f'(\alpha)=3\alpha^2-3p^2$，$f''(\alpha)=6$，$f^{(3)}(\alpha)=6$　よって，定理１より

$$y^2+3\alpha y+(3\alpha^2-3p^2)=0 \cdots\cdots③$$

を得る。この方程式の解を $y_1$，$y_2$ とすると，$\alpha+y_1$，$\alpha+y_2$ は元の方程式の解である。$\alpha$ は重解であるから，$\alpha=\alpha+y_1$ あるいは $\alpha=\alpha+y_2$ でなくてはならない。よって，$y_1=0$ あるいは $y_2=0$ である。

方程式③は０を解に持つことになるから

$$3\alpha^2-3p^2=0$$

よって，$\alpha=\pm p$ を得る。

(i)　$\alpha=p$ のとき

与えられた方程式に代入し，整理すると

$$p^3-p=0$$

となる。この式から $p=0$，１，$-1$ が得られ，そのときの重解はそれぞれ０，１，$-1$ である。

(ii)　$\alpha=-p$ のとき

与えられた方程式から $p^3+p=0$ となる。$p$ は実数であるから，$p=0$　この場合は(i)に含まれる。

## §5. 定理２の紹介

最後に，定理１を利用して，よく知られている次の定理２の証明を与えておこう。

> **定理２**　実係数３次方程式 $x^3+3px+q=0$ が重解を持つための必要十分条件は $4p^3+q^2=0$ である。

**(証明)**　(⇒)　重解を $\alpha$ とすると，$\alpha$ は実数である。例題２の証明と同様にして，方程式

$$y^2+3\alpha y+3\alpha^2+3p=0 \cdots\cdots④$$

が，０を解に持つことがわかる。よって，

$$p=-\alpha^2 \quad \cdots\cdots⑤$$

一方，$\alpha$ は元の方程式の解であるから

$$\alpha^3+3p\alpha+q=0 \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤と⑥から，$\alpha^3=\frac{q}{2}$　これと，⑤から $\alpha$ を消去すると $4p^3+q^2=0$ が得られる。

(⇐)　３次方程式は実数解を持つからそれを $\alpha$ とすると　$\alpha^3+3p\alpha+q=0$　……⑦

仮定より，　$4p^3+q^2=0$　……⑧

⑦と⑧から，$q$ を消去すると

$$4p^3+9p^2\alpha^2+6p\alpha^4+\alpha^6=0$$

よって，$(p+\alpha^2)^2(4p+\alpha^2)=0$ を得る。この式から $p+\alpha^2=0$ または $4p+\alpha^2=0$ を得る。$p+\alpha^2=0$ のとき，④は０を解に持つ。したがって，$\alpha$ が重解である。$4p+\alpha^2=0$ のときは，⑧より $q=\pm\frac{\alpha^3}{4}$ となる。

(i)　$p=-\frac{\alpha^2}{4}$，$q=\frac{\alpha^3}{4}$ のとき

これらを⑦に代入することにより，$\alpha=0$ を得る。この場合，$p=q=0$ となり明らかに０が３重解。

(ii)　$p=-\frac{\alpha^2}{4}$，$q=-\frac{\alpha^3}{4}$ のとき

元の方程式は $x^3-\frac{3}{4}\alpha^2x-\frac{\alpha^3}{4}=0$ となる。これは，$(x-\alpha)\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2=0$ と変形できるから，$-\frac{\alpha}{2}$ を重解に持つことがわかる。以上により，証明は完了した。■

《参考文献》

〔１〕　足羽雄郎　私信
〔２〕　小寺平治　テキスト微分積分　共立出版 p.41

(茨城大学，元茨城県立藤代高等学校)