2数の積が一定のとき和の最小値を求める解法

池内 仁史（いけうち ひとし）

§1. はじめに

数学II「不等式の証明」で“相加・相乗平均”を取り扱った後に，以下のようなその利用問題を生徒達に紹介し演習している。

> $x>0$，$y>0$，$xy=25$ のとき，$x+y$ の最小値を求めよ。

今年度も授業中にこれを説明した後に，生徒達とこの問題の別解が何通りあるかが話題になった。そのときは多分4～5通りくらいだろうと安易な返答をしてしまったが，心配になり考え出した解法を以下に紹介する。

§2. いろいろな解法

[解法1] 相加・相乗平均(数学II)

$x>0$，$y>0$ から，相加・相乗平均の関係により

$x+y \geqq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{25}=10$

ただし，等号成立は $x=y$ のときである。

よって，$x=y=5$ のとき最小値10をとる。■

[解法2] 2次関数(数学I)

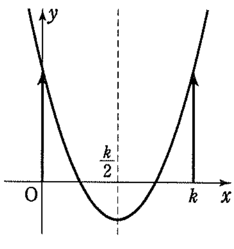
$x+y=k\ (>0)$ とおくと $y=k-x$

$xy=25$ に代入して整理すると

$x^2-kx+25=0$ …①

ただし，$x>0$，$y>0$ より $0<x<k$ …②

この2次方程式①が②の範囲で実数解をもつための k のとり得る値の範囲を求める。



$f(x)=x^2-kx+25$ とおくと，

軸：$x=\dfrac{k}{2}>0$ より

$0<\dfrac{k}{2}<k$ であり，

$f(0)=f(k)=25>0$ であることから，判別式を D とすると $D=k^2-100 \geqq 0$

であればよい。これから

$(k+10)(k-10) \geqq 0$

$k+10>0$ より $k \geqq 10$

$k=10$ のとき①から $(x-5)^2=0$

よって，$x=y=5$ のとき最小値10をとる。■

[解法3] (実数)$^2 \geqq 0$ (数学II)

$x>0$，$y=\dfrac{25}{x}$ より

$x+y=x+\dfrac{25}{x}=\left(\sqrt{x}-\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)^2+10 \geqq 10$

等号成立は，$\sqrt{x}=\dfrac{5}{\sqrt{x}}$ すなわち $x=y=5$ のときで，求める最小値は10である。■

[解法4] 恒等式(数学II)

恒等式 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$ において

$xy=25$ から

$(x+y)^2=(x-y)^2+100 \geqq 100$

$x-y=0$ すなわち $x=y$ のとき，$(x+y)^2$ は最小値100をとる。

よって，$x+y>0$ だから，$x+y$ は $x=y=5$ のとき最小値10をとる。■

[解法5] コーシー・シュワルツの不等式(数学II)

コーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

において，$a=b=1$ とおくと

$2(x^2+y^2) \geqq (x+y)^2$

これを変形して

$2\{(x+y)^2-2xy\} \geqq (x+y)^2$

ここで，条件より $xy=25$ であり，$x+y=k\ (>0)$ とおくと上式は $2(k^2-50) \geqq k^2$

$k^2-100 \geqq 0 \quad (k+10)(k-10) \geqq 0$

$k>0$ より $k+10>0$ であるから

$k-10 \geqq 0$ したがって $k \geqq 10$

等号成立は，$x:y=a:b=1:1$ のときであるから，$x=y=5$ のとき最小値 10 をとる。■

[解法 6] 解と係数の関係（数学II）

$x+y=k\,(>0)$ とおくと，x，y を 2 解とする 2 次方程式は

$t^2-kt+25=0$

この 2 解を α，β とすると，2 解がともに正であるためには，判別式を D とすると

$D=k^2-100 \geqq 0$ より，$(k+10)(k-10) \geqq 0$

$k \leqq -10,\ 10 \leqq k$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=k>0,\ \alpha\beta=25>0$

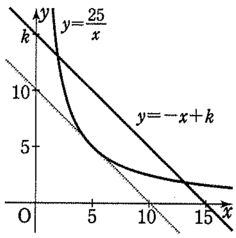
共通範囲を求めて $k \geqq 10$

等号成立は，重解をもつときであるから，$x=y=5$ のとき最小値 10 をとる。■

[解法 7] 2 つのグラフの位置関係（数学II）

$xy=25\ (x>0,\ y>0)$ …③

のグラフは右図のようになる。



また，$x+y=k\,(>0)$ とおくと

$y=-x+k$ …④

直線④が双曲線③と共有点をもつように動くとき，y 切片 k の値が最小となるのは，④が③に接するときであるから，③，④から

$x(-x+k)=25 \qquad x^2-kx+25=0$

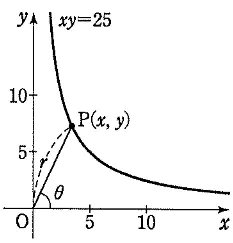
判別式を D とすると

$D=k^2-100=0 \qquad k>0$ より $k=10$

よって，$x=y=5$ のとき最小値 10 をとる。■

[解法 8] 三角関数(1)（数学II）

曲線 $xy=25$ 上の点 P をとり，$\mathrm{OP}=r\,(>0)$，線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角を $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと



$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

が成り立つ。これを $xy=25$ に代入して

$r^2\sin\theta\cos\theta=25$

これから

$$r^2=\frac{25}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{50}{\sin 2\theta} \quad \cdots⑤$$

このとき，$x+y=r(\cos\theta+\sin\theta)\,(>0)$ であるから

$$\begin{aligned}(x+y)^2&=r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2\\&=r^2(1+2\sin\theta\cos\theta)\\&=r^2(1+\sin 2\theta)\end{aligned}$$

⑤を代入して

$$(x+y)^2=\frac{50}{\sin 2\theta}(1+\sin 2\theta)=50\left(1+\frac{1}{\sin 2\theta}\right)$$

ここで，$0<2\theta<\pi$ から $0<\sin 2\theta \leqq 1$

したがって，$\frac{1}{\sin 2\theta} \geqq 1$ であるから

$(x+y)^2 \geqq 50(1+1)=100$

$x+y>0$ から $x+y \geqq 10$

等号成立は，$\sin 2\theta=1$ すなわち $2\theta=\frac{\pi}{2}$ から

$\theta=\frac{\pi}{4}$，$r=5\sqrt{2}$ のときである。

よって，$x=y=5$ のとき最小値 10 をとる。■

[解法 9] 三角関数(2)（数学II）

$x=5\tan\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$y=\frac{25}{x}=\frac{5}{\tan\theta}$$

このとき

$$\begin{aligned}x+y&=5\tan\theta+\frac{5}{\tan\theta}=5\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)\\&=5\cdot\frac{\tan^2\theta+1}{\tan\theta}=5\cdot\frac{1}{\tan\theta\cos^2\theta}\\&=\frac{5}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{10}{\sin 2\theta}\end{aligned}$$

ここで，$0<2\theta<\pi$ より

$0<\sin 2\theta \leqq 1$ ゆえに $\frac{1}{\sin 2\theta} \geqq 1$

等号成立は $2\theta=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ から

$x=y=5$ のときである。

よって，$x+y \geqq 10$ であるから，求める最小値は $x=y=5$ のとき 10 である。■

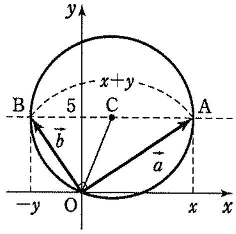
[解法 10] ベクトルと平面図形（数学II＋B）

終点が直線 $y=5$ 上にある平面上の 2 つのベク

トル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(x,\ 5)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(-y,\ 5)$ (ただし, $x>0,\ y>0$) を考えると, $xy=25$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-xy+25=0$

が常に成り立つ。



このとき

$\vec{a}\perp\vec{b}$ すなわち

$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ であるから,

3点O, A, BはABを直径とする円周上にある。この円の中心をCとおくと

$\mathrm{AB}=x-(-y)=x+y$

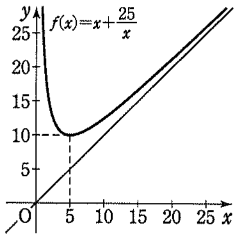
から, $x+y$ の値を最小にするには, 直径ABの長さを最小にすればよい。

したがって, 半径COの長さが最小となるときを考えればよいから, 点Cが直線 $y=5$ に原点Oから下した垂線の足 $(0,\ 5)$ と一致するときが最小となる。

よって, $\dfrac{x+(-y)}{2}=0$ すなわち $x=y=5$ のとき最小値10をとる。■

[解法11]　関数の微分(数学III)

$x\neq0$ より $y=\dfrac{25}{x}$



したがって

$x+y=x+\dfrac{25}{x}$

ここで

$f(x)=x+\dfrac{25}{x}$

とおくと

$f'(x)=1-\dfrac{25}{x^2}=\dfrac{x^2-25}{x^2}=\dfrac{(x+5)(x-5)}{x^2}$

$x>0$ の範囲で増減表をかくと次のようになる。

x	0	…	5	…
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	10	↗

よって, 増減表から $x=y=5$ のとき最小値10をとる。■

[解法12]　2次曲線の回転(数学C)

曲線 $xy=25$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を原点の周りに -45° 回転した点を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

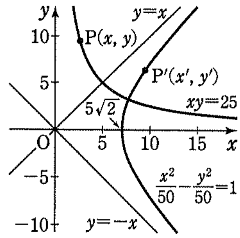
逆行列を利用して

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x'-y'\\x'+y'\end{pmatrix}$$

これから, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$

これを $xy=25$ に代入して

$\dfrac{1}{2}(x'^2-y'^2)=25$



すなわち

$\dfrac{x'^2}{50}-\dfrac{y'^2}{50}=1$

これは, 焦点が $(\pm10,\ 0)$, 頂点が $(\pm5\sqrt{2},\ 0)$, 漸近線が $y=\pm x$ の双曲線の $x>0$ の部分を表す。したがって

$x+y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=\dfrac{2}{\sqrt{2}}x'$

$=\sqrt{2}x'\geqq\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=10$

等号成立は, $x'=5\sqrt{2}$, $y'=0$ のときであるから, $x=y=5$ のとき最小値10をとる。■

[解法13]　面積比較(1)(数学I)

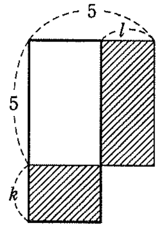
$x>0$, $y>0$, $xy=25$ であることから, 2辺の長さが x, y で面積が25で一定の長方形を考える。いま, 一辺の長さが5の正方形を基準として考えると, たての長さを $5+k\ (k\geqq0)$ に変えると, 面積を一定に保つには横の長さを $5-l\ (l\geqq0)$ としなければならない。これから

$\begin{cases}x=5+k\\ y=5-l\end{cases}\quad(k\geqq0,\ l\geqq0)$

とおくと, $xy=25$ より $(5+k)(5-l)=25$

$5(k-l)-kl=0$

$k-l=\dfrac{kl}{5}$



これから

$x+y=10+(k-l)$

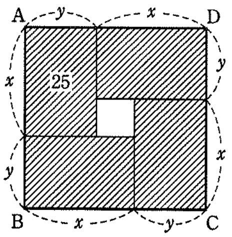
$=10+\dfrac{kl}{5}\geqq10$

等号成立は, $kl=0$ すなわち $k=l=0$ より $x=y=5$ のときである。

よって, $x=y=5$ のとき最小値10をとる。■

[解法 14]　面積比較(2)（数学Ⅰ）

$x \geqq y$ としても一般性は失われないので，たて，横の長さがそれぞれ x，y で面積が 25 の長方形を 4 個，右図のように配置すると四角形 ABCD は正方形となる。



正方形 ABCD の面積と長方形 4 個の面積を比較して

$(x+y)^2 \geqq 4xy = 4 \times 25 = 100$

$x+y>0$ から $x+y \geqq 10$

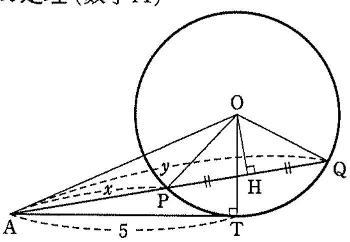
等号成立は，$(x+y)^2=4xy$　すなわち

$(x-y)^2=0$ から $x=y$

よって，$x=y=5$ のとき最小値 10 をとる。■

[解法 15]　方べきの定理（数学A）

右図のように円O外の点からひいた接線の長さが 5 となるような点Aをとり，



接線ATと割線をひく。割線と円との交点を P，Q とし，中心Oから弦 PQ に下ろした垂線の足をHとする。AP=x，AQ=y とおくと方べきの定理から

$AP \cdot AQ = AT^2$

であるから，$xy=25$ が常に成り立つ。このとき

$x+y = AP+AQ = AP+(AP+PQ)$

$= 2AP+2PH = 2(AP+PH) = 2AH$

$= 2\sqrt{AO^2-OH^2}$

$x+y$ の値を最小にするには，AO の長さは一定だから，OH の長さを最大にすればよい。

したがって，2点 P，Q が接点Tと一致するとき，OH の長さが最大となる。

よって，$x=y=5$ のとき最小値 10 をとる。■

[解法 16]　相似比と角の二等分線（数学A）

$\angle A=90°$，AB=AC，Aから対辺 BC に下した垂線 AH が AH=5 を満たすような直角二等辺三角形 ABC を考えると，BH=CH=AH=5 である。いま，$\angle DAB = \angle BAE = \angle CAF$ を満たす点 D，E，F を下図のような位置にとり，DH=x，HF=y とおくと，$\angle DAF=90°$ から $\triangle ADH \backsim \triangle FAH$ である。

したがって，DH : AH = AH : FH より

$x : 5 = 5 : y$ すなわち $xy=25$ が常に成り立つ。

次に，$\triangle ABE \equiv \triangle ACF$ より BE=CF　…⑥

$\angle DAH > \angle FAH$ より AD>AF=AE　…⑦

ここで，$\triangle ADE$ において，線分 AB は $\angle DAE$ の二等分線であるから，その性質から

AD : AE = DB : BE

⑥，⑦から

DB>BE=CF　したがって DB−CF>0

これから

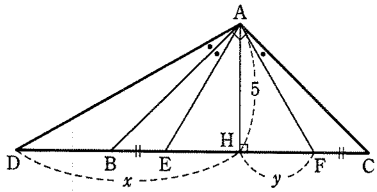
$x+y = (DB+BH)+(HC-CF)$

$= (DB+5)+(5-CF)$

$= 10+(DB-CF) > 10$

よって，$\angle DAB = \angle BAE = \angle CAF = 0°$

すなわち $x=y=5$ のとき最小値 10 をとる。■



§3. おわりに

解法を実際に考え出していったところ，次から次へといろいろなものを利用した別解が出てきて正直驚いた。これらを紹介された生徒達も呆れていたが，別解を考える楽しさや，思わぬ分野の知識が役立つ数学の魅力や奥深さの一端を知ってもらえたように思える。

普段，時間に追われ“効率的な解法”ばかり教えがちになってしまうが，一つの問題に対していろいろなアプローチから問題解法を考えさせ，その成功体験を得させることも高校数学の大切な使命ではないだろうか。

これ以外のエレガントな解法をご存知の方は，ご教授いただければ幸いである。

（埼玉県立春日部高等学校）