内接円と傍接円を用いたヘロンの公式の簡明な証明

君島（きみじま）　巖（いわお）

§1. はじめに

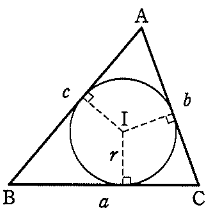
ヘロンの公式は高校の時からどこか不思議な印象があった。教科書では三角関数などを用いて証明されているのをよく見かける。ヘロン自身の証明を見たことがあるが，かなりまわりくどい。今回はこの証明に挑戦した。

§2. 準　備

補題 1　△ABC の面積 S は内接円の径を r とすると，$S=sr$

ただし $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

解説　これは自明であろう。



補題 2　傍接円の半径を R とすると
$S=(s-a)R$

解説　△ABC の面積 S

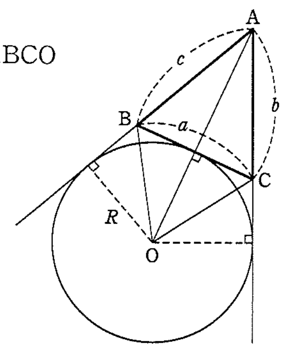
$=$△ABO$+$△ACO$-$△BCO

$=\dfrac{1}{2}cR+\dfrac{1}{2}bR-\dfrac{1}{2}aR$

$=\dfrac{1}{2}(b+c-a)R$

$=\dfrac{1}{2}(2s-a-a)R$

$=(s-a)R$



補題 3　下図の内接円において $n=s-a$，$l=s-b$，$m=s-c$ である。

解説　$l+m=a$ ……①

$m+n=b$ ……②

$n+l=c$ ……③

①＋②＋③から

$2(l+m+n)=a+b+c$

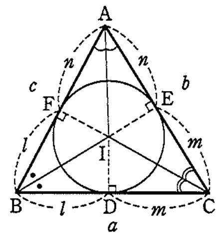
$l+m+n=\dfrac{a+b+c}{2}$

$=s$

$\therefore$ $n=s-a$

$l=s-b$

$m=s-c$



補題 4　下図において △ABC の頂点Aから∠A の内部にある傍接円に引いた接線の長さは AG$=s$ である。

解説　$a+b+c=2s$　……①

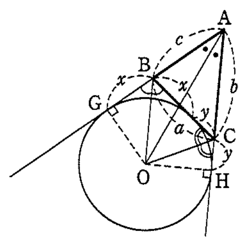
$x+y+b+c=2s$ ……②

AG=AH から

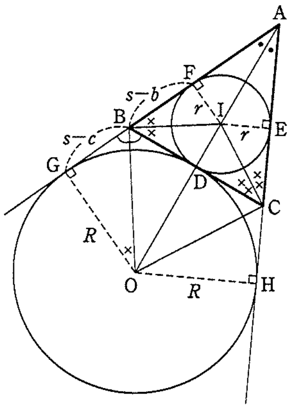
$c+x=b+y$　……③

②，③から

$c+x=s=$AG



§3. 証　明



[図1]

△ABC の内心を I，傍心を O とする。△OBG，△BIF は直角三角形で，BI，BO は角の二等分線であるから ∠OBI＝∠R，∠BOG＝∠IBF

∴　△OBG∽△BIF

したがって，BG：FI＝OG：BF

ここで BG＝AG−AB＝$s-c$

∴　$(s-c):r=R:(s-b)$

$rR=(s-b)(s-c)$ ……①

さて面積 S は，補題1，補題2から

$S=sr$ ……②

$S=(s-a)R$ ……③

①，②，③から

$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(q・e・d)

§4. 補　足

折角補題等で準備したので内接円の半径 r，傍接円の半径 R も出してみたい。

[図1] で傍心 O は ∠A をはさむ直線 AG，AH から等距離にあるから，∠A の2等分線上にある。したがって点 A，I，O は一直線上にある。

△AFI∽△AGO は明らか。

∴　AF：AG＝FI：GO

$(s-a):s=r:R$

$rs=R(s-a)$ ……①

また $rR=(s-b)(s-c)$ ……②

①，②を解くと

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$R=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

これまでの説明の流れから異和感があるが，ついでに △ABC の外接円の半径 R_0 も出しておこう。

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$=\frac{abc}{4R_0}\ \text{[正弦定理]}$$

一方，　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から

$$R_0=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

§5. おわりに

5年くらい前に数Aの教科書をめくっていると $S=(s-a)R$ が載っていてこれはヘロンの公式に関係があると直感した。また，s，$s-a$，$s-b$，$s-c$ が図形的に表現されているのも知った。これ等を組み合わせれば証明が出来るのではと思ったのが動機である。こんなに簡単に証明された事に驚いています。

《参考文献》

新数学A　知研出版

(栃木県　矢板中央高等学校)