数学的な見方・考え方の統合（その2）

―「区別がつくか」に着目した組み分け問題全パターンの解決―

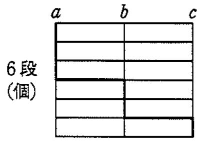
横澤（よこさわ） 克彦（かつひこ）

§1. はじめに

数研通信53号では，道順モデルを使うことで組合せ問題を統合的に指導していけることを次のような問題①で示した。

問題①：a，b，c の異なる3種類の果物がある。ここから6個選び箱詰めを作る方法は何通りあるか。ただし，選ばない果物があってもよい。

道順モデルによる解法：



―― は，a を3個，b を2個，c を1個選んだ場合を表す。

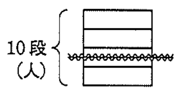
$_{6+2}C_2=28$（通り）

しかし，以下のような問題②では，道順モデルが使えないにもかかわらず，多くの生徒がそれを適応して誤答を出していた。

問題②：A，Bの2部屋に10人を分ける方法は何通りあるか。ただし，空室があってもよい。

解答：$2^{10}=1024$ 通り

誤答：　A部屋　B部屋



$_{11}C_2=55$（通り）

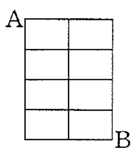
この原因を分析したところ，生徒たちは分けられるもの（今回は「人」）が，区別がつくかという検討をしておらず，またその必要感ももっていないということが分かった。

そこで，区別がつくものと区別がつかないものの違いを認識させる指導を途中に入れ，組み分け問題全パターンを解決する表（下表）を与えた。

ここでわかることは，上述の問題①は重複組合せの問題であり，解決表のウに分類される。

また，誤答の多かった問題②は解決表のイに分類されることになる。

§2. 組み分け問題全パターンの解決表

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th rowspan="2">組の中の個数</th><th colspan="2">分けた組の区別</th></tr>
<tr><th>区別がつく</th><th>区別がつかない</th></tr>
<tr><td rowspan="3">分けられるものの区別</td><td rowspan="2">区別がつく</td><td>決まっている</td><td>ア　$_nC_r$</td><td>エ　$\dfrac{_nC_r}{b!}$
例えば，§4(5)の問題。
つまり，1冊と1冊は入れ替えても同じ組分けを表すため，重複する組数 $b=2$ を $\div 2!$ で解消。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">決まっていない</td><td>イ　a^n
例えば問題② a 種類の部屋に n 人を分ける場合の数である。</td><td>オ
$\dfrac{_nC_r}{b!}$
の繰り返し</td></tr>
<tr><td>区別がつかない</td><td>ウ　重複組合せ

例えば，問題①のように，全て道順モデルに置き換えて解決できる。</td><td>カ
（地道な）
数え上げ</td></tr>
</table>

オ，カは入試問題では，ほとんど扱われていない。

§3.「区別がつくか」の指導

問題：次の10個をそれぞれ区別がつくものとつかないものに分けよ。

①かき　②いちご大福　③人間

④記名の投票用紙　⑤無記名の投票用紙

⑥AさんBさんCさん　⑦3人

⑧名前の分かる3人

⑨名前の分からない3人

⑩区別のつかない本9冊を2冊，3冊，4冊に分けた組同士

解答：区別がつく　③　④　⑥　⑦　⑧　⑨　⑩

区別がつかない　①　②　⑤

§4. 解決表によって解けるようになった問題

問題：6冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか？

(1)　Aさんに3冊，Bさんに2冊，Cさんに1冊の3組に分ける。

答　解決表アの繰り返し

$_6C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 60$ 通り

(2)　3冊，2冊，1冊の3組に分ける。

答　解決表のア

$_6C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 60$ 通り

(3)　3冊，2冊，1冊にして3人に分ける。

答　解決表のア　かつ　3人への分配

$_6C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \times 3! = 360$ 通り

(4)　Aさんに4冊，Bさんに1冊，Cさんに1冊の3組に分ける。

答　解決表のア

$_6C_4 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 = 30$ 通り

(5)　4冊，1冊，1冊の3組に分ける。

答　解決表のエ

$\dfrac{_6C_4 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{2!} = 15$ 通り

(6)　4冊，1冊，1冊の3人に分ける。

答　解決表のエ　かつ　3人への分配

$\dfrac{_6C_4 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{2!} \times 3! = 90$ 通り

(7)　Aさんに2冊，Bさんに2冊，Cさんに2冊の3組に分ける。

答　解決表のア

$_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 90$ 通り

(8)　2冊ずつ3組に分ける。

答　解決表のエ

$\dfrac{_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!} = 15$ 通り

(9)　2冊ずつ3人に分ける。

答　解答表のエ　かつ　3人への分配

$\dfrac{_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!} \times 3! = 90$ 通り

§5. おわりに

こうした指導を経た結果，冒頭にあげた問題②「A，Bの2部屋に10人を分ける方法は何通りあるか。ただし，空室があってもよい。」は，全ての生徒が，「人」を区別がつく対象であると認識して，解決表から正解を導いていた。

これまで「慣れ」で解いていた問題であったが，我々教員も解決表のような地図をもって現在地を確認し整理しながら教えるべきだと思う。

そして，「区別がつくか」に的を絞った授業を途中に入れることで，生徒たちの解決方針は正しく定まるものである。

現場にいるものとして，よく生徒たちを観察し，彼らの真の疑問に応える授業を心掛けたいものである。

次回は，数学的な見方・考え方の統合(その3)として，目で解く最大値・最小値問題を提案します。

(長野県上田千曲高等学校)