たかが三角形，されど三角形

八巻（やまき）　専文（ひろふみ）

§0. はじめに

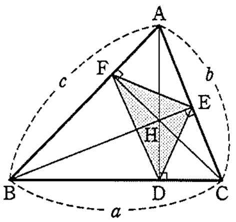
三角形には興味ある性質がある。気まぐれに三角形を書いていくときれいな規則性が発見される。

三角形の垂心と内心を通る対辺との 3 交点で作られる三角形について考察してみました。

§1. 垂線の足でつくる三角形の面積

三角形 ABC の各頂点から垂線を下ろした 3 つの足を D，E，F としたとき，三角形 ABC と三角形 DEF の面積の比について考察する。

$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とすると



$$\triangle AEF=\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin A$$

$$=\frac{1}{2}c\cos A\cdot b\cos A\cdot\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\cos^2 A\sin A$$

$$\frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}bc\cos^2 A\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A}=\cos^2 A$$

$\therefore$　$\triangle AEF=\cos^2 A\cdot\triangle ABC$

同様にして　$\triangle BDE=\cos^2 B\cdot\triangle ABC$

$\triangle CDE=\cos^2 C\cdot\triangle ABC$

$$\triangle DEF=\triangle ABC-(\triangle AEF+\triangle BDE+\triangle CDE)$$

$$=(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C)\triangle ABC \quad\cdots①$$

余弦定理から

$$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$$

$$=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2$$

よって　$\triangle DEF$

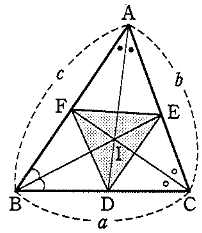
$$=\left\{\frac{a^2(b^4+c^4-a^4)+b^2(a^4+c^4-b^4)+c^2(a^4+b^4-c^4)-2a^2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}\right\}\triangle ABC \quad\cdots②$$

A，B，C がわかっているときは①が成り立つ。

a，b，c がわかっているときは②が成り立つ。

§2. 頂角の二等分線と対辺の交点でつくる三角形の面積

三角形 ABC の各頂点の角の二等分線と対辺との交点を D，E，F，としたとき，三角形 ABC と三角形 DEF との面積の比について考察する。



$$\triangle AEF=\frac{1}{2}AF\cdot AE\cdot\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+c}\cdot\sin A$$

$$\frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}\cdot\sin A}{\frac{1}{2}bc\cdot\sin A}$$

$$\therefore\quad \triangle AEF=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\triangle ABC$$

同様にして　$\triangle BDF=\dfrac{ca}{(a+b)(b+c)}\triangle ABC$

$$\triangle CDE=\frac{ab}{(c+a)(b+c)}\triangle ABC$$

$$\therefore\quad \triangle DEF=\triangle ABC-(\triangle AEF+\triangle BDF+\triangle CDE)$$

$$=\left(1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ca}{(a+b)(b+c)}-\frac{ab}{(c+a)(b+c)}\right)\triangle ABC$$

$$\therefore\quad \triangle DEF=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\triangle ABC$$

§3. おわりに

三角形は単純な図形ではあるが大変奥が深いことがわかる。

「たかが三角形されど三角形」である。教科書から離れて生徒に三角形を書かせて，何か発見できないか考えさせるのも幾何に興味をもたせる方法かなと思います。

（山梨県　北杜市立甲陵高等学校）