# 黒幕追求流と実行犯追求流

石橋（いしばし） 信夫（のぶお）

## §0. はじめに

2種類の変数を持つ通過領域，最大・最小，軌跡を求める問題において，2つの解法がある。それが黒幕追求流と実行犯追求流である。

黒幕追求流とは，実行犯と黒幕が必ずペアで犯罪を行う際，結果的には実行犯を調べるのであるが，まず黒幕を追求していって，実行犯の有様を暴いていく方法である。例えばテレビドラマの水戸黄門において，悪代官が黒幕で実行犯が悪徳商人であり，悪代官の方から追求していって悪徳商人の凶状を暴いていくのである。

黒幕が初めから現れている場合とそうでない場合等に分けて，青チャート(改訂版)やスタンダード数学演習(2006年版，2007年版)から関係する問題を取り上げてみた。例題の解答は元の解答を参考に解説，補足，別解を付け加えてみた。

## §1. 黒幕が初めから現れている場合

**例題1**　直線 $y=2ax+a^2$ ……① について，$a$ が全ての実数値をとって変化するとき，直線が通過する領域を求めよ。

**解答1**　黒幕追求流(ここで黒幕は $a$，実行犯は $x$，$y$ である。)

$a$ について整理すると

$$a^2+2xa-y=0 \text{ ……②}$$

直線①が点$(x,\ y)$をとるための必要十分条件は $a$ の方程式②が実数解を持つことである。

よって

$$\frac{D}{4}=x^2-(-y)\geqq 0 \text{ より } y\geqq -x^2$$

これが求める領域である。

**解答2**　実行犯追求流

$x=X$ とおく。($x$ をまず$X$と固定して考える。$x$ 軸に垂直ないくつかの線でスライスして考えていき，最後に$X$を動かす)

まず $a$ を変化させたときの $y$ の範囲を求める。

$f(a)=a^2+2aX$ として $a$ で微分して，増減表を作ると $f'(a)=2(a+X)$ より

| $a$ | …… | $-X$ | …… |
|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(a)$ | ↘ | $-X^2$ | ↗ |

増減表から $a=-X$ で $y$ は最小値 $-X^2$ をとる。次に，$X$を動かすと結局求める範囲は $y=-x^2$ の上部。すなわち $y\geqq -x^2$

**例題2**　$m$ が実数全体を動くとき，次の2直線の交点$P$はどんな図形を描くか。

$mx-y=0$ ……①，$x+my-m-2=0$ ……②

**解説**　黒幕は $m$ で，基本的にはこれを消去して実行犯 $x$，$y$ の関係式を求めるわけである。

$x\neq 0$ のときは $m=\dfrac{y}{x}$ で問題はない。

しかし $x=0$ のとき最初の2つの直線の方程式を満たす実行犯 $x$，$y$ に対して黒幕 $m$ が存在するかどうかが実行犯 $x$，$y$ の存在につながる。

**解答**　(i)　$x\neq 0$ のとき①から $m=\dfrac{y}{x}$

これを②に代入して

$$x+\frac{y^2}{x}-\frac{y}{x}-2=0$$

$x\neq 0$ より両辺に $x$ をかけて

$$x^2+y^2-2x-y=0 \text{ ……③}$$

(ii)　$x=0$ のとき①かつ②を同時に満たすのは $y=0$，$m=-2$ のみ

よって(i)，(ii)から求める図形は

円 $x^2+y^2-2x-y=0$ でただし点$(0,\ 1)$を除く。

**補足**　③で $x=0$ とすると2点$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$が円上の点になるが，点$(0,\ 1)$を満たす黒幕 $m$ が存在しないので結局点$(0,\ 1)$は求める図形から除かれる。

## §2. 等式を作ることによって実行犯と思われていた値が黒幕になる場合

> **例題 3**　変数 $x$ の範囲が実数全体であるとき，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

**解説**　与式$=k$ とおくことによって，実行犯と思われていた $x$ が黒幕となり，$k$ が実行犯となる。実行犯と思われていた悪徳商人が実は黒幕となる。金持ちの方が黒幕になることはよくあるから。具体的には，黒幕 $x$ が存在するための実数条件から $k$ の値の範囲を求めることになる。

**解答**　$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=k$ とおいて分母を払い，$x$ について整理すると

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1=0$ ……①

(i)　$k \neq 1$ のとき，$x$ が実数となるための条件は

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2 \geqq 0$

これを解いて $0 \leqq k \leqq 4$　(ただし $k \neq 1$)

(ii)　$k=1$ のとき，$-3x=0$ から $x=0$ で

これは実数

よって(i)，(ii)から $0 \leqq k \leqq 4$

すなわち $0 \leqq \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} \leqq 4$

> **例題 4**　$x$，$y$ が2つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 10$，$y \geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

**解説**　$x+y=k$ とおくことによって黒幕が $x$，$y$，実行犯が $k$ となる。グラフを描き黒幕である実数 $x$，$y$ が存在する範囲を求めることによって，実行犯 $k$ の範囲が求められる。問題は簡単なので，解答だけを示す。

**解答**　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$

$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2

> **例題 5**　実数 $x$，$y$ が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変わるとき点$(x+y,\ xy)$の動く領域を図示せよ。

**解説**　$x+y=X$，$xy=Y$ とおくことで黒幕は $x$，$y$ で，実行犯が $X$，$Y$ である。特に黒幕である $x$，$y$ が存在するための実数条件を実行犯 $X$，$Y$ でどう表すかがポイントになる。

**解答**　$x+y=X$ …①，$xy=Y$ …②，$x^2+y^2 \leqq 1$ …③

から $X^2-2Y \leqq 1$　よって $Y \geqq \dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ ……④

$x$，$y$ は2次方程式 $t^2-Xt+Y=0$ ……⑤ の2つの実数解であるから，⑤の判別式により

$\dfrac{D}{4}=X^2-4Y \geqq 0$　よって $Y \leqq \dfrac{X^2}{4}$ ……⑥

④かつ⑥より $\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2} \leqq Y \leqq \dfrac{X^2}{4}$ が求める範囲である。

**補足**　このパターンの問題の領域はくちびるの形になる。①，②から $y$ を消去して $x^2-Xx+Y=0$ とし，$x$ が実数より $\dfrac{D}{4}=X^2-4Y \geqq 0$ とすると，$y$ が実数であることが抜けている。⑤のように綺麗な式は綺麗に扱うのが基本である。

> **例題 6**　放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる2点P，Qが存在するような $a$ の値の範囲を求めよ。

**解説**　$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$(ただし $p \neq q$)として中点を $X=\dfrac{p+q}{2}$，$Y=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ とする。中点$(X,\ Y)$が黒幕ではなく$(p,\ q)$が黒幕となる。ここでは略解を示す。

**略解**　PQの中点が直線上にあることと，傾きから

$\dfrac{p^2+q^2}{2}=a \times \dfrac{p+q}{2}+1$ ……①

$(p+q) \times a=-1$ ……②

①，②から　$p+q=-\dfrac{1}{a}$，$pq=\dfrac{1-a^2}{2a^2}$

$p$，$q$ を解とする2次方程式は変形して

$2a^2t^2+2at+1-a^2=0$ ……③

ここで最初に与えられた条件から $a \neq 0$

③の方程式が異なる2つの実数解を持つことが必要十分条件。

これを解いて $a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a$

## §3. 結局は黒幕も実行犯も対等になる場合

完全に定数分離ができる場合，最後は定数の値の範囲を求めることになる。一応変数が黒幕で定数が実行犯となるのだが，実際は2つのグラフを見比べて求めるので，対等になる。

> **例題 7**　曲線 $C : y=x^3+3x^2+x$ と点A(1，$a$)

がある。Aを通って$C$に3本の接線が引けるとき，定数$a$の値の範囲を求めよ。

**略解**　曲線$C$上の点$(t,\ t^3+3t^2+t)$における接線の方程式は $y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2$ となり，これが点$(1,\ a)$を通るから

$-2t^3+6t+1=a$ ……①

$t$ の3次方程式①が異なる3つの実数解を持つことが必要十分。曲線 $f(t)=-2t^3+6t+1$ と直線 $y=a$ が異なる3点で交わる条件は $-3<a<5$

**補足**　例題4との類似と見ればこの場合一応$t$が黒幕，$a$が実行犯となるが，実際は対等である。

**例題8**　$\theta$ の方程式 $\sin^2\theta+a\cos\theta-2a-1=0$ を満たす$\theta$があるような定数$a$の値の範囲を求めよ。

**解説**　これは難問である。三角関数を2次方程式に同値変形し，解の配置問題にしていくわけであるが，これはそのなかでも一番難しいパターンである。以下に3通りの略解を示す。略解3で $\cos\theta=x$ とすれば，一応$x$が黒幕で$a$が実行犯となるが結果的に対等となる。

**略解1**　(排反を意識した場合分けで結果的にチャートの軸についての場合分けと同様になる)

$\cos\theta=x$ とおくと与えられた方程式は $x^2-ax+2a=0$ となり，この左辺を$f(x)$とすると，与えられた条件は $f(x)=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも1つの解を持つことと同値。

……※

(i)　$x=1$ または $x=-1$ を解に持つ場合

$a=-1$ または $a=-\dfrac{1}{3}$ ……①

(ii)　$-1<x<1$ に1つだけ解を持つ場合

$f(-1)\cdot f(1)<0$ から $-1<a<-\dfrac{1}{3}$ ……②

(iii)　$-1<x<1$ に2つ(重解を含む)の解を持つ場合

判別式 $D\geqq 0$ かつ軸 $-1<\dfrac{a}{2}<1$ かつ両端

$f(-1)>0,\ f(1)>0$ から，$-\dfrac{1}{3}<a\leqq 0$

よって(i)，(ii)，(iii)から　$-1\leqq a\leqq 0$

**略解2**　(排反でなくとも条件を満たすものをもれなく網羅していく場合分け)

……※までは同様。

(i)　$-1\leqq x\leqq 1$ に2つの解を持つ場合

判別式 $D\geqq 0$ かつ軸 $-1\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1$ かつ両端

$f(-1)\geqq 0,\ f(1)\geqq 0$ から $-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0$

(ii)　$-1<x<1$ に1つの解を持つかまたは $x=1$ または $x=-1$ を解に持つ場合

$f(-1)\cdot f(1)\leqq 0$ から $-1\leqq a\leqq -\dfrac{1}{3}$

よって(i)，(ii)から $-1\leqq a\leqq 0$

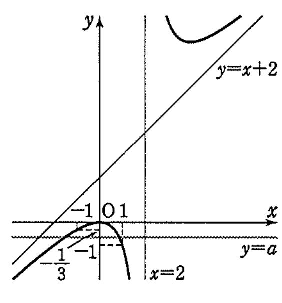
**略解3**　(定数分離の形にして，数Ⅲの分数関数の微分を用いる。場合分けがいらないので，文系でも数Ⅲのここらあたりまで勉強しておけば役に立つ例でもある)

……※までは同様。

$x\neq 2$ のとき $\dfrac{x^2}{x-2}=a$　ここで $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ とする。$f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ より増減表とグラフは以下の通り。

| $x$ | … | $-1$ | … | $0$ | … | $1$ | … | $2$ | … | $4$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-\dfrac{1}{3}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↘ | | ↘ | $8$ | ↗ |

よって求める条件は $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ と $y=a$ とが $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも1つの解をもつことと同値であるからグラフより $-1\leqq a\leqq 0$





《参考文献》

〔1〕 改訂版 チャート式基礎からの数学II＋B　チャート研究所 編著　数研出版

〔2〕 2006 スタンダード数学演習 I・II・A・B 受験編　数研出版編集部 編　数研出版

〔3〕 2007 スタンダード数学演習 I・II・A・B 受験編　数研出版編集部 編　数研出版

〔4〕 数学ショートプログラム　東京出版

〔5〕 数学を決める論証力　東京出版



(埼玉県立浦和東高等学校)