放物線とその接線

―幾何的な性質―
―接線の作図法―

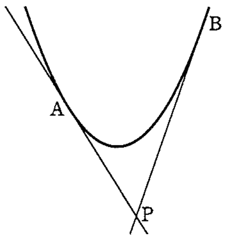
大塚　秀幸（おおつか　ひでゆき）

■放物線とその接線のつくる図形

§1. はじめに

放物線とその2つの接線で作る図形については，次の性質がよく知られている。

（性質）放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点A，Bにおける接線を引き，その交点をPとする。ここで，A，Bの x 座標を α，β とすると，Pの x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となる。

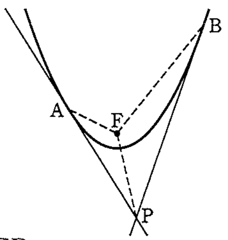


※　放物線 $y=ax^2$ のときは，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$

この性質は，3点A，B，Pが非常にスマートな位置関係になっていることを示している。さらに同じ状況で興味深い性質がある。本稿では，放物線の焦点を追加し新たな幾何的性質について述べる。

§2. 焦点を含めた幾何的性質

（定理）右の図のように，放物線に2つの接線を引き，接点をA，Bとし，2接線の交点をPとする。また，放物線の焦点をFとする。このとき　△AFP∽△PFB



（証明）すべての放物線は相似なので，いま，放物線を $y=x^2$ としても一般性を失わない。2つの接点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ とすると，前に確認した性質により，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ となる。また，放物線の焦点は $\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$ となる。すると

$$\mathrm{PF}^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-0\right)^2+\left(\alpha\beta-\frac{1}{4}\right)^2$$
$$=\alpha^2\beta^2+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}\beta^2+\frac{1}{16}$$
$$=\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$\mathrm{AF}^2=(\alpha-0)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2$$
$$=\alpha^4+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{16}=\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\mathrm{AP}^2=\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+(\alpha^2-\alpha\beta)^2$$
$$=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\alpha^2(\alpha-\beta)^2$$
$$=(\alpha-\beta)^2\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right)$$

同様にして

$$\mathrm{BF}^2=\left(\beta^2+\frac{1}{4}\right)^2,\quad \mathrm{BP}^2=(\beta-\alpha)^2\left(\beta^2+\frac{1}{4}\right)$$

以上から　$\mathrm{AF}^2:\mathrm{PF}^2=\mathrm{PF}^2:\mathrm{BF}^2=\mathrm{AP}^2:\mathrm{PB}^2$

$$=\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right):\left(\beta^2+\frac{1}{4}\right)$$

よって　AF：PF＝PF：BF＝AP：PB

∴　△AFPと△PFBにおいて，3組の辺の比が等しいので，△AFP∽△PFB　■

さらに，前定理から同時に次のことが言える。

（系）　$\mathrm{AF}\cdot\mathrm{BF}=\mathrm{PF}^2$

§3. おわりに

§1の性質と§2の系は以下のように表現することができるが，この状況から2種類の平均が登場するのは非常におもしろいことだと思う。

Pのx座標…A，Bのx座標の相加平均 　PF　…AFとBFの相乗平均

■放物線の接線の作図法

§1. はじめに

円の接線については難なく作図できるが，放物線の接線の作図についてはどうだろうか。放物線と接線の関係をいろいろと考察しながら，その作図法を探ってみたい。

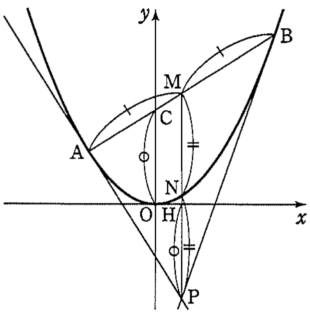
§2. 放物線外の与えられた1点を通る接線

右下の図のように，放物線 $y=ax^2$ とその2本の接線からできる図形について考察しよう。(以下，座標や直線の式は途中計算を省き結果のみ記していく)

放物線上の点を$A(\alpha, a\alpha^2)$, $B(\beta, a\beta^2)$とし，その2点における接線の交点をPとすると，

$P\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$

となる。



また，Mを線分ABの中点とすると，

$M\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{a\alpha^2+a\beta^2}{2}\right)$ となる。

さらに，Nを線分PMの中点とすると，

$N\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ a\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)$ となり，Nは放物線 $y=ax^2$ 上の点であることがわかる。

ところで，直線ABの式は $y=a(\alpha+\beta)x-a\alpha\beta$ となるので，y軸切片Cは$C(0,\ -a\alpha\beta)$となる。

すなわち，$CO=PH$ となることがわかる。(HはPからx軸におろした垂線の足)

以上の図形間の関係をうまく利用すると，放物線外の点Pを通る放物線の接線の作図法は次のようになる。

〈作図手順〉

※　複雑さをさけるため，大雑把な流れのみ示す。左の図と比較しながら手順を追って欲しい。

① Pを通りx軸に垂直な線ℓを作図する。このとき，x軸との交点をHとし放物線との交点をNとする。

② $PN=MN$ となる点Mをℓ上にとる。(ただし，PとMはNに対し反対側)

③ $PH=CO$ となる点Cをy軸上にとる。(ただし，PとCはx軸に対し反対側)

④ 直線MCを引き，放物線との交点をA，Bとする。

⑤ 直線PA，PBを引く。この2直線が求める接線である。

§3. 補足

本稿では議論をわかりやすくするために放物線を$y=ax^2$としたが，任意の放物線についても，軸と頂点における接線が引ければ，全く同じように作図ができる。

(東京都　元文教大学付属高等学校)