指数対数交換法

松田(まつだ)　康雄(やすお)

本稿では，次の公式の証明と応用を書いた。

なお，以下 a，p，q は1でない正の定数，m は定数とする。

【公式1】 $p^{m\log_a q}=q^{m\log_a p}$

公式1の証明は，対数関数 $y=\log_a x$ が1対1の関数であることに基づいている。

(証明) 証明すべき等式の各辺に対して，底が a の対数を考える。

$$\log_a p^{m\log_a q}=m\log_a q\cdot\log_a p$$
$$\log_a q^{m\log_a p}=m\log_a p\cdot\log_a q$$

したがって

$$\log_a p^{m\log_a q}=\log_a q^{m\log_a p}$$

対数関数 $y=\log_a x$ は1対1の関数なので

$$p^{m\log_a q}=q^{m\log_a p}$$

が成り立つ。 ∎

公式1を使えば，指数と対数が合わさった計算が楽になることがある。

問題　$2^{3\log_4 3}$ を簡単にすると，$\boxed{}$である。
〔08 京都薬大〕

(解答) $2^{3\log_4 3}=3^{3\log_4 2}=3^{3\times\frac{1}{2}}=3^{1+\frac{1}{2}}$
$=3\sqrt{3}$ ∎

公式1を使って，底の変換公式を証明できる。

【公式2】 $\log_p q=\dfrac{\log_a q}{\log_a p}$

(証明)

$$a^{\log_a p\cdot\log_p q}=(a^{\log_a p})^{\log_p q}$$
$$=(p^{\log_a a})^{\log_p q}=p^{\log_p q}=q^{\log_p p}$$
$$=q=q^{\log_a a}=a^{\log_a q}$$

より

$$\log_a p\cdot\log_p q=\log_a q$$

となり示される。 ∎

公式1は a^x の微分にも応用できる。

【公式3】 $(a^x)'=a^x\log a$

(証明)

$$(a^x)'=(a^{x\log e})'=(e^{x\log a})'$$
$$=e^{x\log a}\cdot\log a=a^{x\log e}\cdot\log a$$
$$=a^x\log a$$ ∎

公式1は最初から使うのではなく，指数対数を一通り学んだ後に使った方が，分かり直しも期待できて有効だと思える。

《参考文献》

〔1〕 松田康雄　歌ってスウガク　現代数学社　2004年
〔2〕 2009年受験用全国大学入試問題正解数学(私立大学編)　旺文社

(福岡県　明治学園高等学校)