特集　役に立つ豆知識

石井（いしい）　一郎（いちろう）
石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）
皆川（みなかわ）　秀矢（しゅうや）

■極限の問題では逆（十分性）の説明が必要！（石井一郎先生）

次の例は，逆を調べないと正解が求まりません。逆を調べる重要性が説明しやすいと思うのですが…。

例　次の等式が成り立つように，定数 a の値を定めよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+(a+1)x-2a-1}{x-a}=4$$

解答　$\lim_{x\to a}\{x^2+(a+1)x-2a-1\}$

$=\lim_{x\to a}\frac{x^2+(a+1)x-2a-1}{x-a}(x-a)=4\cdot0=0$ より

$\lim_{x\to a}\{x^2+(a+1)x-2a-1\}=0$　よって，

$a^2+(a+1)a-2a-1=0$，$2a^2-a-1=0$，

$(a-1)(2a+1)=0$，$a=1$，$-\frac{1}{2}$

逆に，[1]　$a=1$ のとき，

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

よって適する

[2]　$a=-\frac{1}{2}$ のとき，

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{x^2+\frac{1}{2}x}{x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{x\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}x=-\frac{1}{2}$$

よって不適

[1]，[2] から $a=1$　■

類題　$\lim_{x\to a}\frac{x^2+(2a+1)x+a-1}{x-a}=-3$ のとき，定数 a の値を求めよ。（答　$a=-1$）

■$\sum_{k=1}^{n}$(等差数列)×(等比数列) の型の問題で答がきれいになる作問方法　（石井一郎先生）

次の例は，答がきれいで採点しやすいとは思うのですが…。

例　$S=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot3^{k-1}$ を求めよ。

解答　$S=3\cdot3^0+5\cdot3^1+7\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-2}+(2n+1)\cdot3^{n-1}$

$3S=\quad 3\cdot3^1+5\cdot3^2+7\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}+(2n+1)3^n$

辺々引いて

$$\begin{aligned}-2S&=3\cdot3^0+2\cdot3^1+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n+1)\cdot3^n\\&=3+\frac{2\cdot3\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n+1)\cdot3^n\\&=3+3(3^{n-1}-1)-2n\cdot3^n-3^n\\&=3+3^n-3-2n\cdot3^n-3^n\\&=-2n\cdot3^n\qquad\therefore\ S=n\cdot3^n\end{aligned}$$
■

一般に $S=\sum_{k=1}^{n}(ak+b)r^{k-1}$（ただし $r\neq1$）のとき，

$S=(a+b)+(2a+b)r+\cdots\cdots+\{a(n-1)+b\}r^{n-2}+(an+b)r^{n-1}$

$rS=(a+b)r+(2a+b)r^2+\cdots\cdots+\{a(n-1)+b\}r^{n-1}+(an+b)r^n$

辺々引いて

$(1-r)S$

$$\begin{aligned}&=a+b+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}-(an+b)r^n\\&=b+\frac{a(1-r^n)}{1-r}-(an+b)r^n\\&=\frac{b-br+a-ar^n-an(1-r)r^n-b(1-r)r^n}{1-r}\end{aligned}$$

ここで $b-br+a=0$ のとき $-b(1-r)=a$ より

$S=\dfrac{-anr^n}{1-r}$　　$\dfrac{-a}{1-r}=b$ より $S=bnr^n$

$$\sum_{k=1}^{n}\{b(r-1)k+b\}r^{k-1}=bnr^n$$

両辺を b で割ると,

$$\sum_{k=1}^{n}\{(r-1)k+1\}r^{k-1}=nr^n$$

となります。先の例は, $r=3$ のときです。

更に, できる生徒には次の解法も有効です。

(灘高校の塩﨑先生に教えていただきました。)

$$S=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot 3^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{k\cdot 3^k-(k-1)\cdot 3^{k-1}\}$$

(この変形がポイント!)

$$=(1\cdot 3-0\cdot 1)+(2\cdot 3^2-1\cdot 3^1)+(3\cdot 3^3-2\cdot 3^2)$$
$$+\cdots\cdots+\{(n-1)\cdot 3^{n-1}-(n-2)\cdot 3^{n-2}\}$$
$$+\{n\cdot 3^n-(n-1)\cdot 3^{n-1}\}=n\cdot 3^n$$

(岡山県立岡山朝日高等学校)

■$a_n=S_n-S_{n-1}$ について(石濱文武先生)

数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(n\geqq 1)$ とすると $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ ですが $a_n=S_n-S_{n-1}$ から得られた a_n が $n=1$ のときも有効なときとそうでないときがあります。有効であるための S_n の条件を調べてみましょう。

$a_n=S_n-S_{n-1}$　　に $n=1$ を代入すると

$a_1=S_1-S_0$　　となりますから, 条件は

$a_1=S_1-S_0=S_1$　すなわち　$\boxed{S_0=0}$

です。ここで S_0 は与えられた S_n の n に $n=0$ を(強引に)代入したものであることに注意してください。次の4つの実例で使い方を会得してください。

(1)　$S_n=n^2+n$ の場合は $S_0=0$ ですから
　$a_n=2n$ $(n\geqq 1)$ です。

(2)　$S_n=n^2+n+1$ の場合は $S_0=1$ ですから
　$a_1=3$, $a_n=2n$ $(n\geqq 2)$ です。

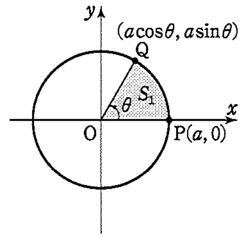
(3)　$S_n=2^n-1$ の場合は $S_0=0$ ですから
　$a_n=2^{n-1}$ $(n\geqq 1)$ です。

(4)　$S_n=2^n$ の場合は $S_0=1$ ですから
　$a_1=2$, $a_n=2^{n-1}$ $(n\geqq 2)$ です。

(神奈川県立湘南高等学校)

■楕円の面積(皆川秀矢先生)

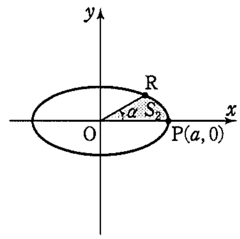
(i)　$P(a,\ 0)$ を時計を反対回りに θ だけ移動してできる扇形の面積を S_1 とすると



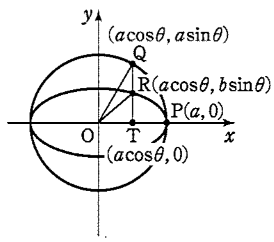
$$S_1=\pi a^2\times\frac{\theta}{2\pi}$$
$$=\frac{a^2\theta}{2}\quad\cdots\cdots①$$

で表されることは良く知られている。

(ii)　では $P(a,\ 0)$ を楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上に沿って, α だけ移動させた部分の面積を S_2 とすると, S_2 はどんな式で表されるのだろうか?



(iii)　楕円は円の y 座標を $\dfrac{b}{a}$ 倍して描くことができる。



$\angle QOP=\theta$ とおくと, 点 $Q(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ は円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点であり, 点 $R(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点である。

(iv)　$T(a\cos\theta,\ 0)$ とすると,
$\triangle OQT:\triangle ORT=a:b$, ◺$TQP$: ◺$TRP=a:b$
から　$\triangle OQP:\triangle ORP=a:b$
$\triangle OQP=S_1$, $\triangle ORP=S_2$ とおくと,

$S_2=\dfrac{b}{a}S_1$　$\cdots\cdots②$　である。

(v)　一方 $\angle ROP=\alpha$ とおくと, $R(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$

であるから $\tan\alpha=\dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta}=\dfrac{b}{a}\tan\theta$　$\cdots\cdots③$

(vi)　①, ②, ③から楕円に沿って α だけ移動させた部分の面積は

$$\boxed{S_2=\frac{b}{a}\times\frac{a^2\theta}{2}=\frac{ab\theta}{2}\quad ただし,\ \tan\alpha=\frac{b}{a}\tan\theta}$$

と表す事ができる。$\alpha=2\pi$ のとき $\theta=2\pi$ となり

円の面積 $S_1=a^2\pi$, 楕円の面積 $S_2=ab\pi$

となる。

(北海道北見緑陵高等学校)