―数研通信 59 号を読んで (2)―

$n!$ を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表そう

四宮(しのみや) 一成(かずしげ)

§1. はじめに

数研通信数学 No.59 に，松村文人先生が示された公式は「場合の数，確率」の考えからでも導くことができる。

そのことを，この公式を発展させた (包含した) 公式を導き，示す。

§2. r 種類の目がでる確率

〈問題 1〉 n 回サイコロを振って，
r $(1 \leqq r \leqq min(n,\ 6))$ 種類の目が出る確率 $p(n,\ r)$ を求めよ。

(解 1) n 回振って，特定の r 種類の目がでる確率を $q(n,\ r)$ とし，n 回振って r 種類の目がでる確率を $p(n,\ r)$ とすると，1, 2, …, 6 のうちの r 種類の選び方が ${}_6\mathrm{C}_r$ 通りあるから

$$p(n,\ r) = {}_6\mathrm{C}_r q(n,\ r) \quad \cdots\cdots①$$

n 回振って，特定の目 A_1, A_2, …, A_r が，それぞれ，a_1, a_2, …, a_r 回ずつ出るものとする。このとき当然 $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = n$ ……② である。

各 a_i は $\neq 0$ であるが，$=0$ になってもよいとする。そして，そのときの確率を v とする。そのうち，特に，$a_1 = 0$ であるときの確率を p_1，$a_2 = 0$ であるときの確率を p_2，…，$a_r = 0$ であるときの確率を p_r，また，$a_1 = a_2 = 0$ であるときの確率を p_{12}，$a_1 = a_3 = 0$ であるときの確率を p_{13}，…，$a_{r-1} = a_r = 0$ であるときの確率を $p_{r-1,\,r}$，更に，$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ であるときの確率を p_{123}，… (以下略) と表すことにすると，すべての a_i が $\neq 0$ であるときの確率は，包除の原理から

$$\begin{aligned} q(n,\ r) = v &- (p_1 + p_2 + \cdots + p_r) \\ &+ (p_{12} + p_{13} + \cdots + p_{r-1,\,r}) \\ &- (p_{123} + \cdots + p_{r-2,\,r-1,\,r}) \\ &+ \cdots + (-1)^{r-1}(p_{12\cdots r-1} + \cdots + p_{23\cdots r}) \end{aligned}$$

である。ここで，$v = \left(\dfrac{r}{6}\right)^n$

以下同様に，

p_1, p_2, …, p_r の確率は，どれも $\left(\dfrac{r-1}{6}\right)^n$

p_{12}, p_{13}, …, $p_{r-1,\,r}$ の確率は，どれも $\left(\dfrac{r-2}{6}\right)^n$

p_{123}, …, $p_{r-2,\,r-1,\,r}$ の確率は，どれも $\left(\dfrac{r-3}{6}\right)^n$

……

$p_{12\cdots r-1}$, …, $p_{23\cdots,\,r}$ の確率は，どれも $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

であるから，

$$\begin{aligned} q(n,\ r) &= \left(\frac{r}{6}\right)^n - {}_r\mathrm{C}_1\left(\frac{r-1}{6}\right)^n + {}_r\mathrm{C}_2\left(\frac{r-2}{6}\right)^n \\ &\qquad - \cdots + (-1)^{r-1}{}_r\mathrm{C}_{r-1}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k {}_r\mathrm{C}_k\left(\frac{r-k}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots③ \end{aligned}$$

よって，①より

$$p(n,\ r) = {}_6\mathrm{C}_r \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k {}_r\mathrm{C}_k\left(\frac{r-k}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots④$$

(解 2) この事象が起こるのは次の図のような場合である。

1つのみ　2つまで　3つまで
$A_1(A_1\cdots)\,|\,A_2(A_1$ か $A_2\cdots)\,|\,A_3(A_1$ か A_2 か $A_3\cdots)\,|$
a_1 回　a_2 回　a_3 回
r 個まで
$\cdots\cdots|\,A_r(A_1$ か A_2 か$\cdots A_r\cdots)$
……　a_r 回

つまり，振り始めて a_1 回はある目 (何でもよい) A_1 が出て，次にある目 A_2 が出て 2 種類目に入り，A_1 か A_2 が a_2 回続いて，次にある目 A_3 が出て，3 種類目に入り，A_1 か A_2 か A_3 が a_3 回続いて，…，最後に r 番目のある目 A_r が出て，A_1 から A_r までの目が a_r 回続く場合である。ここ

で回数の a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_r は，和が n であるような様々な値になる。したがって，求める確率は，

$$p(n,\ r)=\sum\frac{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{a_1-1}\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^{a_2-1}\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^{a_3-1}\cdots\left(\frac{7-r}{6}\right)\left(\frac{r}{6}\right)^{a_r-1}$$

$$=\frac{6\cdot5\cdot4\cdots(7-r)}{6^r}\sum\left(\frac{1}{6}\right)^{a_1-1}\left(\frac{2}{6}\right)^{a_2-1}\left(\frac{3}{6}\right)^{a_3-1}\cdots\left(\frac{r}{6}\right)^{a_r-1}\quad\cdots\cdots⑤$$

ただし $\sum$ は，$a_1+a_2+\cdots+a_r=n$ を満たす自然数 a_i の組すべてにわたっての和である。

§3. 全部の目がそろう確率

〈問題２〉 サイコロを投げて，n 回目に，はじめて６種類全部の目がそろう確率 $P(n)$ を求めよ。$(n\geqq6)$

（解１） $P(n)=p(n-1,\ 5)\times\frac{1}{6}$ であるから④から，

$$P(n)=\frac{1}{6}\cdot{}_6C_5\cdot\sum_{k=0}^{4}(-1)^k{}_5C_k\left(\frac{5-k}{6}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-5\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}+10\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}-10\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}+5\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\quad\cdots\cdots⑥$$

（解２） $P(n)=p(n-1,\ 5)\times\frac{1}{6}$ であるから，⑤から

$$P(n)=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^5}\sum\left(\frac{1}{6}\right)^{a_1-1}\left(\frac{2}{6}\right)^{a_2-1}\left(\frac{3}{6}\right)^{a_3-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{a_4-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{a_5-1}$$

$$=\frac{1}{6^{n-1}}\sum1^{a_1}\cdot2^{a_2}\cdot3^{a_3}\cdot4^{a_4}\cdot5^{a_5}\quad\cdots\cdots⑦$$

ただし，$\sum$ は $a_1+a_2+\cdots+a_5=n-1$ を満たす自然数 a_i の組すべてにわたっての和である。

§4. ${}_nC_r$ に関する公式

１． $\sum1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3}4^{a_4}5^{a_5}$

$$=5^n-{}_5C_14^n+{}_5C_23^n-{}_5C_32^n-{}_5C_41^n\quad\cdots\cdots⑧$$

ただし，$\sum$ は

$$a_1+a_2+\cdots+a_5=n\quad\cdots\cdots⑧'$$

を満たす自然数 a_i の組すべてにわたっての和である。$(n\geqq6)$

２． $\sum1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3}\cdots m^{a_m}$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k{}_mC_k(m-k)^n\quad\cdots\cdots⑨$$

ただし，左辺の $\sum$ は

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=n\quad\cdots\cdots⑨'$$

を満たす自然数 a_i の組すべてにわたっての和である。$(n\geqq m)$

（証） **１．** ⑥，⑦から

$$\frac{1}{6^{n-1}}\sum1^{a_1}\cdot2^{a_2}\cdot3^{a_3}\cdot4^{a_4}\cdot5^{a_5}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-5\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}+10\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}-10\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}+5\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

分母を払って，$n-1$ を n に置き換えれば，⑧⑧′を得る

２． サイコロの目は６種類であるが，サイコロの目が m 種類であるとして，n 回目に，はじめて m 種類全部の目がそろう確率について考える。上述とほとんど同じ計算で（６を m に置き換えるだけで），⑨⑨′を得る。

§5. $n!$ を ${}_nC_r$ で表す公式

$$n!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_kk^n$$

（証） ⑨で，$m=n$ とすれば，⑨′が $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$ となり，これを満たす自然数 a_i はすべて $=1$ である。したがって，⑧から，

$$n!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n$$

ここで，$n-k=k'$ とおけば，$k:0\to n-1$ のとき，$k':n\to1$ であるから，

$$n!=\sum_{k'=1}^{n}(-1)^{n-k'}{}_nC_{n-k'}k'^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_kk^n$$

§6. 終わりに

ここにあげた公式の作り方は，n 人を m 室に空室を作らないで配分する方法の数を求めるときや，モンモールの問題を解くときの考え方と同様である。

$\sum$ の計算を，純粋に $\sum$ でやらずに，確率に置き換えてやるのは，少々気が引けるが，このようにすれば，高校生にもどうにか理解させることができると思うがどうでしょうか。

（元徳島県教員）