球の表面積についての一考察

―球の体積からではなく，区分求積法によって―

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

(1) 現状への不満

球の表面積と体積については，中学校で学習していたが，新指導要領で高校に送られてきた。これだけではなく，２次方程式の解の公式や接弦定理など，以前は中学校でやれていたことが，いろいろな事情のもとで先送りされ，高校数学が圧迫されていることには不満を禁じ得ない。

(2) 球についての取扱い

ア　球の体積

さて，数学Ⅰで扱う球の体積については，その説明の方針は次の２通りに分けられる。

① 半径 r の円柱の容器に水を入れておき，それに半径 r の球を入れたら，水面が $\frac{4}{3}r$ だけ上昇する（あるいは，先に球を入れておき，球の直径まで水を入れ，そのあと球を取り出すと水面の高さが $\frac{2}{3}r$ となること）から求める。

② ガバリエリの原理を用いて求める。

イ　球の表面積

また，球の表面積については，

① 半球にひもを巻き付け，その半分で渦巻き状の円を作ると，それが同じ半径の円（板）になる。

② 球の体積がわかったとして，角錐に等積変形することで求める。

①は実験的で，直観的には把握できやすいものの数学的な証明とはいえない。その点，②の方が数学的な説得力があるが，これも結局は「…であることが知られている。」ということを使っているので，程度の差はあるものの不満の残る所である。

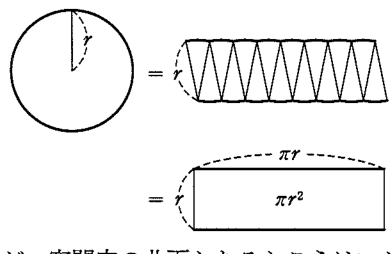
これは，厳密さはともあれ，数学的な事実は知らせておこうというスタンスであろう。いずれ数学Ⅲで，定積分の応用である回転体の体積で明確にされるのでこだわる必要もないようであるが，ただ理科の実験のような説明には，いささか抵抗感がある。

極限を内包しているので，数学Ⅰではさらりとかわしている感じがするが，それはやむをえないとして，数学Ⅲまで履修した生徒の中には球の表面積を，球の体積を介さず，区分求積法で求められないかと考える者もいるのではないかと思う。そこで，このような生徒のために考察を行ってみた。

§2. 区分求積法で球の表面積を求める

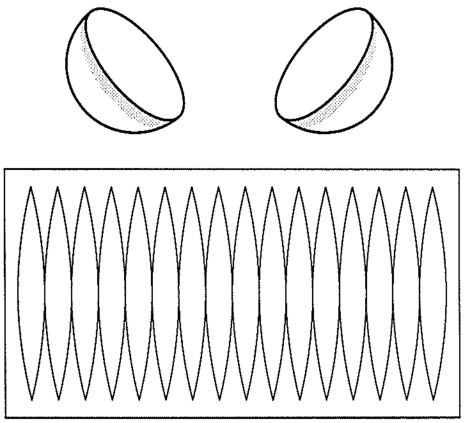
(1) 地球儀の製作の思い出

円の面積であれば，よく知られているように，次のような感覚的な説明ができる。



これが，空間内の曲面となるとこうはいかない。そこで，区分求積法を使って，その面積を求めるが，少しの準備が必要である。そこには，地球儀の製作法にその考え方のヒントがある。

子どもの頃，科学啓蒙雑誌の付録に，プラスチック製の半球と，下のような図形に世界地図が描かれた用紙とがセットになったものがあった。（図１）



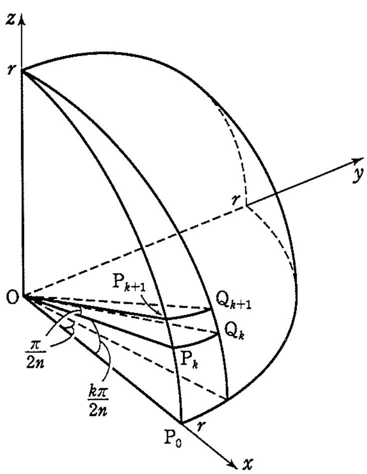
（図１）

半球は組み合わせて球を作り，世界地図は曲線に沿って切り離して，それに貼り付けると地球儀ができるというものであった。

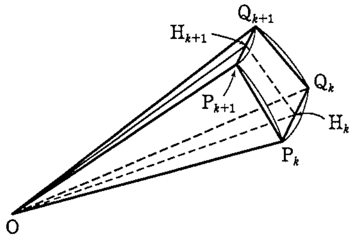
これから，球面の面積が図２のような図形を寄せ集めれば，求められるということに気づいた記憶がある。

（図２）

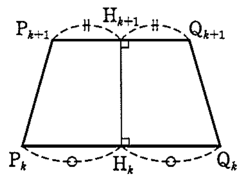
(2)　区分求積のための準備



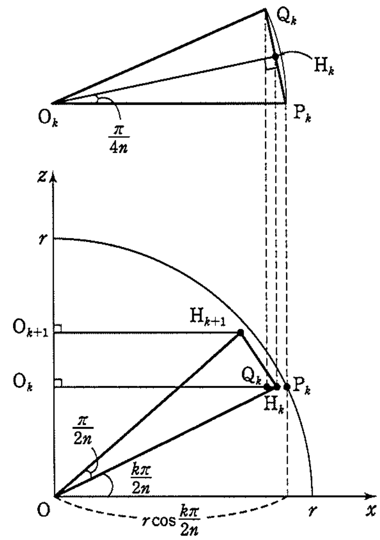
（図３）



（図４）



（図５）



（図６）

ここで，図の説明をしておこう。

図３のように，zx 平面上で，原点Oを中心とする半径 r の四分円 $x^2+z^2=r^2$ $(x\geqq 0,\ z\geqq 0)$ を考え，その上に点 $P_k(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ を

$\angle P_kOP_{k+1}=\dfrac{\pi}{2n}$ （ただし，$P_0(r,\ 0,\ 0)$）となるようにとる。

次に，点 P_k を z 軸のまわりに $\dfrac{\pi}{2n}$ だけ回転させた点を Q_k として，図４のような台形 $P_{k+1}P_kQ_kQ_{k+1}$ を考え，その面積を S_k とする。

$\triangle P_kOQ_k$ は，$OP_k=OQ_k=r$ の二等辺三角形であるから，O から P_kQ_k に垂線 OH_k を下ろすと，H_k は P_kQ_k の中点となる。（図５）

台形 $P_{k+1}P_kQ_kQ_{k+1}$ は，$P_kP_{k+1}=Q_kQ_{k+1}$ の等脚台形であるから，$H_kH_{k+1}\perp P_kQ_k$，$H_kH_{k+1}\perp P_{k+1}Q_{k+1}$ となり，H_kH_{k+1} は，P_kQ_k を下底，$P_{k+1}Q_{k+1}$ を上底とする台形 $P_{k+1}P_kQ_kQ_{k+1}$ の高さとなる。

したがって，

$$S_k=\frac{1}{2}(P_kQ_k+P_{k+1}Q_{k+1})\cdot H_kH_{k+1} \quad \cdots\cdots①$$

となる。

ここで，$2\sum_{k=0}^{n-1}S_k$ が図2の近似となっている。

また，$8n\sum_{k=0}^{n-1}S_k$ が，図1の世界地図における地球の表面積の近似である。

さて，図6のように，H_k から z 軸に垂線 H_kO_k を下ろすと，

$$O_kH_k=O_kP_k\cos\angle P_kO_kH_k=r\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}$$

また，

$$\begin{aligned}P_kQ_k&=2P_kH_k=2O_kP_k\sin\angle P_kO_kH_k\\&=2r\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

ここで，$\triangle H_kOH_{k+1}$ に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}H_kH_{k+1}{}^2&=OH_k{}^2+OH_{k+1}{}^2\\&\qquad-2OH_kOH_{k+1}\cos\angle H_kOH_{k+1}\\&=r^2\cos^2\frac{k\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{4n}\\&\quad+r^2\cos^2\frac{(k+1)\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{4n}\\&\quad-2r\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}\\&\qquad\times r\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}\cdot\cos\frac{\pi}{2n}\\&=r^2\cos^2\frac{\pi}{4n}\left\{\cos^2\frac{k\pi}{2n}+\cos^2\frac{(k+1)\pi}{2n}\right.\\&\qquad\left.-2\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\right\}\end{aligned}$$

ここで，上式の{ }内を＊とすると，

$$\begin{aligned}\{*\}&=\left\{\cos\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\right\}^2\\&\qquad-2\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+1\right)\end{aligned}$$

また，和積公式，半角公式から，

$$\cos\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n}$$

$\cos\frac{\pi}{2n}+1=2\cos^2\frac{\pi}{4n}$ であるから，

$$\begin{aligned}\{*\}&=4\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{4n}\cos^2\frac{\pi}{4n}\\&\qquad-2\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\cdot2\cos^2\frac{\pi}{4n}\\&=4\cos^2\frac{\pi}{4n}\left\{\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right.\\&\qquad\left.-\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\right\}\end{aligned}$$

また，積和公式から，

$$\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{2n}\right\}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\{*\}&=4\cos^2\frac{\pi}{4n}\left\{\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2n}\right\}\end{aligned}$$

さらに，この式における{ }内を＊＊とすると，2倍角の公式から，

$$\begin{aligned}\{**\}&=\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{4n}\\&\qquad-\frac{1}{2}\left\{2\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{4n}-1\right\}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2n}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\sin^2\frac{\pi}{4n}=\sin^2\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

よって，

$$H_kH_{k+1}{}^2=r^2\cos^2\frac{\pi}{4n}\cdot4\cos^2\frac{\pi}{4n}\cdot\sin^2\frac{\pi}{4n}$$

$H_kH_{k+1}>0$，$r>0$，$\sin\frac{\pi}{4n}>0$ であるから，

$$H_kH_{k+1}=2r\cos^2\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}\quad\cdots\cdots③$$

①，②，③より，

$$\begin{aligned}S_k&=\frac{1}{2}\left\{2r\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\right.\\&\qquad\left.+2r\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\right\}\times2r\cos^2\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}\\&=2r^2\sin\frac{\pi}{4n}\left\{\cos\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\right\}\\&\qquad\times\cos^2\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

和積公式を使って，

$$=2r^2\sin^2\frac{\pi}{4n}\cos^2\frac{\pi}{4n}\cdot2\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n}$$

2倍角の公式から，

$$=r^2\sin^2\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\quad\cdots\cdots④$$

よって，求める球の表面積を S とすると，

$S=\lim_{n\to\infty}8n\sum_{k=0}^{n-1}S_k$ であるから，$8n\sum_{k=0}^{n-1}S_n$ を求めると④より，

$$8n\sum_{k=0}^{n-1}S_k=8nr^2\sin^2\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}&=\cos\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4n}\right)\\&=\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}-\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

であるから，

$$8n\sum_{k=0}^{n-1}S_k=8nr^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{4n^2}\cdot\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$\times\left(\cos\frac{\pi}{4n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$$=8nr^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\frac{\pi^2}{4n^2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)\frac{2n}{\pi}$$

$$\times\left(\cos\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$$=8r^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)\frac{2}{\pi}$$

$$\times\left(\cos\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$$=4\pi r^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$\times\left(\cos\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$$

ここで，$n\longrightarrow\infty$ とするとき，

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\longrightarrow 1,\quad \cos\frac{\pi}{2n}\longrightarrow 1,$$

$$\cos\frac{\pi}{4n}\longrightarrow 1,\quad \sin\frac{\pi}{4n}\longrightarrow 0$$

$$\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}\longrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\longrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

であるから，

$$8n\sum_{k=0}^{n-1}S_k\longrightarrow 4\pi r^2\cdot 1^2\cdot 1\cdot(1\cdot 1-0\cdot 1)$$

$$=4\pi r^2$$

以上から，半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ であることが示された。

§3. おわりに

「…であることが知られている」ということから出発して数学学習を進めることの背景には，その事実の証明が現段階では困難であるとか，その証明に重きを置くのではなく，その後の展開に重きを置く場合がある。

最近の子どもは「なぜ？」とは思いつつもそれを追究するよりは，それを受け入れることや，その使い方を習得することに専念しがちである。

今後は「ゆとり教育」の反省の下，高校に先送りされた内容を中学校にお返しし，削除された複素数平面や微分方程式，一次変換などが戻ってくることが期待される。

これまでは改訂の度に，内容，ページ数ともに減少し，残念な思いをしていたが，これからは学力回復方策がとられるようで，徐々に復活する兆しが感じられ，歓迎している。

進んだ生徒には，以前は軽く扱った内容を厳密に証明させる機会が与えられ，それが再発見，定着の場になるような教科書作りに期待したい。

なお，この証明はやや冗長であるが，三角比，余弦定理，三角関数の加法定理，２倍角の公式，半角の公式，積和公式，和積公式，$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$，三角関数の定積分などを扱い，これまでの総復習ができるので，受験前の生徒にも使えるのではないかと思う。

《参考文献》

〔１〕 数学Ⅰ　数研出版
〔２〕 高等学校数学Ⅰ　啓林館
〔３〕 数学Ⅰ　東京書籍
〔４〕 数学Ⅰ　実教出版
〔５〕 数学Ⅰ　第一学習社

（山口県立岩国高等学校）