高校生のための

放物線のはなし (part 2)

今井(いまい)　武彦(たけひこ)

§6. 放物線の性質

図8を次の順に見て下さい。放物線 $y=x^2$ がある。そして，順に

i) Oの真上に適当に点Aをとり，Oの右真横に OB=2OA となるように点Bをとり，四角形 AOBC が長方形になるように点Cをとってある。

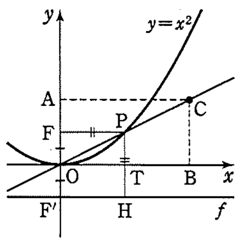


図8

ii) 放物線と直線OCの交点をPとし，直線Pxとy軸の交点をFとしてから，Oに関してFと対称な点をF′として直線F′xを引いた。この直線F′xをfとしている。

iii) 直線Pyがx軸，直線fと交わる点をそれぞれT，Hとしている。四角形PFF′Hは正方形である。

先生　Pの座標を求めます。

Pのx座標をtとするとy座標は t^2 となり，

OT=t，TP=t^2 です。図の作り方から

相似関係により　2TP=OT

ゆえに　$2t^2=t$ $(t>0)$

これを解いて　$t=\dfrac{1}{2}$

よって，$P\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$，$F\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，$F'\left(0,\ -\dfrac{1}{4}\right)$，$f$ の方程式は $y=-\dfrac{1}{4}$ となる。

先生　次の(a)，(b)が成り立つことは明らかです。放物線上の点について，

(a)　Oは，点Fからの距離と直線fからの距離が等しい。$\left(\text{ともに}\dfrac{1}{4}\text{です。}\right)$

(b)　Pは，点Fからの距離と直線fからの距離が等しい。$\left(\text{ともに}\dfrac{1}{2}\text{です。}\right)$

ところが，実はFとfから等距離にあるのはこの2点O，Pに限ったことではなく，

> 放物線 $y=x^2$ 上のすべての点は，
> 点$F\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$からの距離と直線
> $f\left(y=-\dfrac{1}{4}\text{ の直線}\right)$からの距離が等しい。　〔n〕

ことがいえるのです。それを証明しましょう。

放物線 $y=x^2$ 上の任意の点を $Q(t,\ t^2)$ とします。図9を参照。最初は $t>0$ とします。

直線Qyとx軸，直線fとの交点をそれぞれ

$T(t,\ 0)$，$H\left(t,\ -\dfrac{1}{4}\right)$

とし，線分FHとx軸の交点をMとします。図を見て，次の順に確かめます。

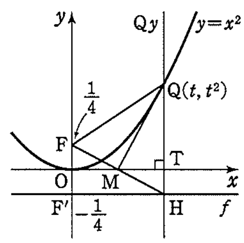


図9

① Mは線分FH，OTの中点である。

② QMを引くと，△TQM∽△TMH

③ 直線QMは線分FHの垂直二等分線である。

先生　①は簡単です。△OFM≡△THM が直ぐわかるから，FM=HM，OM=TM です。　②はどうでしょうか。

生徒　2つの三角形の内角は直角のところしかわからないから長さで考えます。

TQ=t^2，TM=$\dfrac{1}{2}$OT=$\dfrac{1}{2}t$，TH=$\dfrac{1}{4}$

△TQM と △TMH において

(ア)　∠QTM=∠MTH=90°

(イ) $\dfrac{TQ}{TM}=\dfrac{t^2}{\frac{1}{2}t}=2t$, $\dfrac{TM}{TH}=\dfrac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{4}}=2t$,

$\therefore$ TQ : TM＝TM : TH $(=2t:1)$

(ア)と(イ)から，$\triangle$TQM∽$\triangle$TMH が成り立ちます。相似比は $2t:1$ です。

先生 そうです。Aさん，完璧でした。では，③はどうでしょうか。

生徒 ②の $\triangle$TQM∽$\triangle$TMH より

(ウ) $\angle$TQM＝$\angle$TMH

$\triangle$TQM は $\angle$QTM＝90° の直角三角形だから

(エ) $\angle$QMT＋$\angle$TQM＝90°

(ウ)と(エ)より，$\angle$QMT＋$\angle$TMH＝90°

この式は，QM⊥FH を表しています。

よって，直線QMはFHの中点Mを通り，FHに垂直であるとわかったから③が成り立ちます。

先生 正解です。Bさん，よくわかっています。そうすると，Qは線分FHの垂直二等分線上の点だから QF＝QH，すなわち，QはFからの距離と f からの距離が等しいのです。放物線 $y=x^2$ は y 軸に関して対称ですから，$t<0$ であっても〔n〕は成り立ちます。

図9は $\frac{1}{2}<t$ のときの例ですが，$0<t<\frac{1}{2}$ のときもこれまで述べたことがそのままあてはまります。図を描いて確かめておきましょう。また，$t=0$ のときは(a)に相当します。

放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ の場合はどうなるでしょうか。

生徒 §5の〔m〕を使えばいいと思いますが。

先生 鋭い。それで説明しましょう。

放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2$ は原点Oを中心にして相似でした。相似比は $1:\frac{1}{a}$ でした。そこで，放物線 $y=x^2$ と点 $F\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ と直線 $f\left(y=-\frac{1}{4}\right)$ を合わせた図形を，原点を中心にして $\frac{1}{a}$ 倍に拡大（縮小，伸縮）すれば，放物線 $y=ax^2$ と点 $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$ と直線 $y=-\frac{1}{4a}$ を合わせた図形になりますから，次のことがいえます。

> 放物線 $y=ax^2$ 上のすべての点は，点 $F\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$ からの距離と直線 $f\left(y=-\frac{1}{4a}\right)$ からの距離が等しい。 〔n*〕

ここまで述べたことから，さらにわかることがあります。FHの垂直二等分線QMの傾きは(イ)のところで $\dfrac{TQ}{TM}=2t$ と求まっています。§4では放物線 $y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ で引いた接線の傾きは〔i_2〕の $2t$ に等しいことがわかっていました。ですから，Qを通るFHの垂直二等分線QMは，$Q(t,\ t^2)$ における放物線の接線になっています。垂直二等分線QM≡接線 $t\ell_0$（ここでは「≡」を重なっているという意味にとって下さい。）

さらに言えることがあります。図9で，

$\triangle$FQM≡$\triangle$HQM です。

図9′で見ると，

$\angle$FQM＝$\angle$HQM

また $\angle$SQN＝$\angle$HQM

これから，

$\angle$SQN＝$\angle$FQM

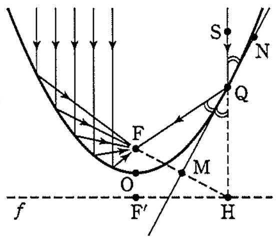
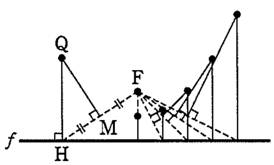


図9′

放物線を鏡と考えると，上の等式からわかることは，真上から（y 軸に平行に）Sを通ってQに届いた光はQで反射してFへ進むことになります。Sはどこにあってもいいので，真上から平行にやってくる光はすべて反射してFに集まることになります。

放物線 $y=x^2$ を y 軸のまわりに1回転してできる曲面の形をもつ放物面鏡を作ると，強い太陽光が真上から当たったとき，反射してすべてFに集まります。1点Fは一瞬にして焦熱地獄と化します。点Fは放物線の焦点（focus，英和辞典に「炉」が原義とある），f は準線と名付けられています。

焦点Fと準線 f が紙の上に与えられているとき，定規とコンパスを使って作図するにはどうすればいいでしょうか。上の図を参考にして放物線を描いてみましょう。



§7. 面積

放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 $P_1(t-d,\ (t-d)^2)$, $P_2(t+d,\ (t+d)^2)$ をとります (ただし, $d>0$)。

y 軸に平行な 2 直線 P_1y (方程式 $x=t-d$), P_2y ($x=t+d$) で挟まれた帯 $S|t,\ d|$ の別表記として帯 P_1P_2y も使うことにします。この帯に含まれる放物線の P_1 から P_2 までの部分を弧 P_1P_2 または $\overset{\frown}{P_1P_2}$, 線分 P_1P_2 を弦 P_1P_2 とも記すことにします。$\overset{\frown}{P_1P_2}$ と帯 P_1P_2y の中心線との交点Pを $\overset{\frown}{P_1P_2}$ の x 中点ということにします。さらに, 中心線 Py と弦 P_1P_2, x 軸との交点をそれぞれ Q, T とします。境界線 P_1y, P_2y と x 軸との交点をそれぞれ T_1, T_2 とします。(図 10 参照)

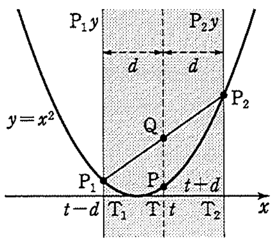


図 10

線分の長さについて

$$T_1P_1=(t-d)^2,\ \ TP=t^2,\ \ T_2P_2=(t+d)^2$$

TQ は T_1P_1 と T_2P_2 の平均であるから

$$TQ=\frac{T_1P_1+T_2P_2}{2}=\frac{(t-d)^2+(t+d)^2}{2}=t^2+d^2$$

$$\therefore\ \ PQ=TQ-TP=(t^2+d^2)-t^2=d^2$$

よって, 次のように主張できます。

> 折り幅 d の帯の境界線が放物線 $y=x^2$ と交わる点を P_1, P_2 とする。次に $\overset{\frown}{P_1P_2}$ の x 中点を P, 弦 P_1P_2 の中点をQとすると
> $PQ=d^2$ 〔p〕

上の〔p〕は, 線分の長さ PQ がPの位置に無関係なこと, 折り幅 d だけで定まることを表しています。これは放物線のすばらしい性質です。

次に進みます。上で定めた 3 点 P_1, P_2, P を頂点とする $\triangle P_1P_2P$ を帆 P_1P_2 と呼ぶことにします。帆かけ舟のイメージから $\overset{\frown}{P_1P_2}$ を舟, $\triangle P_1P_2P$ を帆と見立てたのです。

以上の準備のもとに, 本論に入ります。

> 放物線 $y=x^2$ の弧 P_1P_2 と弦 P_1P_2 で囲まれた図形の面積を求めたい。

この問題に挑戦します。その図形を帆 (三角形) で埋め尽してやろうと決意しました。

第 1 段 帯 P_1P_2y の折り幅は d として考える。

図 10 と図 11 は同じ設定をしている。〔p〕により, $PQ=d^2$, 帯 P_1P_2y の幅 $=2d$

帆 P_1P_2 (すなわち $\triangle P_1P_2P$) の面積を $S(P_1P_2)$ と表すことにします (以下これに倣う)。

$$S(P_1P_2)=\frac{1}{2}\cdot\text{帯の幅}\cdot PQ=\frac{1}{2}\cdot 2d\cdot d^2=d^3$$

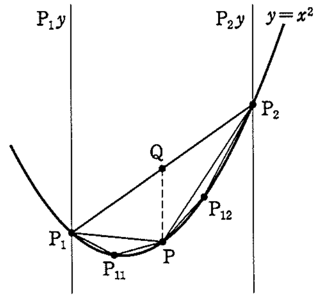


図 11

> 放物線 $y=x^2$ 上の帆 AB の面積は帯 ABy の折り幅の 3 乗である。 〔q〕

帆の面積は対応する帯の折り幅によって定まり, 帯の位置に無関係であることが〔q〕でわかった。

$S(P_1P_2)$ を S_1 とする。$S_1=S(P_1P_2)$

第 2 段 帆 P_1P_2 の下に 2 つの帆を作る。すなわち, 帆 P_1P と帆 PP_2。($\triangle P_1PP_{11}$ と $\triangle PP_2P_{12}$)

これらの帆に対応する帯 P_1Py, 帯 PP_2y の折り幅は前段の帯 P_1P_2y の折り幅 d の $\frac{1}{2}$ だから $\frac{1}{2}d$

したがって, 2 つの帆の面積は〔q〕により,

$$S(P_1P)=S(PP_2)=\left(\frac{1}{2}d\right)^3=\frac{1}{8}d^3$$

これら 2 つの面積和を S_2 とすると

$$S_2=2\cdot\frac{1}{8}d^3=\frac{1}{4}d^3$$

第 3 段 第 2 段で作った 2 つの帆の下に 2 つずつ合わせて 4 つの帆を作る。それらに対応する帯の折り幅は帯 P_1P_2y の折り幅 d の $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 倍だから $\frac{1}{2^2}d$, 作った 4 つの帆の面積はどれも $\left(\frac{1}{2^2}d\right)^3$, 4 つの面積和を S_3 とすると

$$S_3=4\cdot\left(\frac{1}{2^2}d\right)^3=2^2\cdot\frac{1}{2^6}d^3=\frac{1}{2^4}d^3=\frac{1}{4^2}d^3$$

〔$2^{2n}=(2^2)^n=4^n$ の変形をしている〕

第 4 段 第 3 段で作った 4 つの帆の下に 2 つずつ合わせて 8 つ (2^3個) の帆を作る。それら 2^3 個の面積和を S_4 とする。

$S_4=\frac{1}{4^3}d^3$ となることを確かめて下さい。

以下，第5段，第6段，…と下へ，下へと帆を作っていく。作った帆の面積和 S_5，S_6，… を求めていく。この作業をどこまでも続けたいのですが，第 n 段の作業を確かめます。

i）第1段，第2段，第3段，…で作る帆の数は，1個，2個，2^2 個，…と2倍，2倍，…となっていきますから，第 n 段は 2^{n-1} 個です。

ii）第1段，第2段，第3段，…で作る帆に対応する帯の折り幅は，d，$\frac{1}{2}d$，$\frac{1}{2^2}d$，…と半分 $\left(\frac{1}{2}\text{倍}\right)$，半分，…となっていきますから，第 n 段の折り幅は $\frac{1}{2^{n-1}}d$ です。したがって，

iii）第 n 段で作る帆の面積は，それぞれが $\left(\frac{1}{2^{n-1}}d\right)^3=\frac{1}{(2^{n-1})^3}d^3$ となります。これに i）で求めた個数を掛けて

iv）$S_n=2^{n-1}\cdot\frac{1}{(2^{n-1})^3}d^3=\frac{1}{(2^{n-1})^2}d^3$

$$=\frac{1}{(2^2)^{n-1}}d^3=\frac{1}{4^{n-1}}d^3$$

第 n 段の結果が出ました。

$$S_n=\frac{1}{4^{n-1}}d^3 \qquad 〔r〕$$

注　〔r〕の式で n を2としてみて下さい。第2段の結果になります。n を3としてみれば第3段の結果になりますね。つまり〔r〕はすべての段の結果を表していることになります。

ラストスパートをかけます。弧 P_1P_2 と弦 P_1P_2 で囲まれた図形を上で作り続けた帆で被い尽します。求める面積を S とするとき，S を次のように計算していいのではないでしょうか。

$$S=S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$$
$$=d^3+\frac{1}{4}d^3+\frac{1}{4^2}d^3+\frac{1}{4^3}d^3+\frac{1}{4^4}d^3+\cdots\cdots$$
$$=d^3\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots\right)$$

次の x が求まればいいのですが。工夫しよう。

$$x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots$$

上式の両辺に4を掛けてみます。

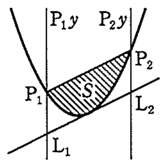
$$4x=1+\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots}$$
$$=1+\underline{x}$$

$4x=1+x$　を解いて　$x=\frac{1}{3}$

x の値が求まりました。S の式に代入して

$$S=d^3\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}d^3 \qquad 〔s〕$$

目的地に到達しました。いい換えると

> 放物線 $y=x^2$ の弧 P_1P_2 と弦 P_1P_2 で囲まれた図形の面積を S とする。帯 P_1P_2y の境界線 P_1y，P_2y が P_1P_2 に平行な接線と交わる点をそれぞれ L_1，L_2 とし，平行四辺形 $P_1L_1L_2P_2$ の面積を S^* とする。そのとき，
>
> 
>
>
> i）$S=\frac{2}{3}S^*$ 　〔t〕
>
> ii）帯 P_1P_2y の幅が $D\left(\text{折り幅は半分の } d=\frac{1}{2}D\right)$ のとき
>
> $S=\frac{1}{6}D^3$ 　〔u〕

〔u〕は，〔s〕から　$S=\frac{4}{3}d^3=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}D\right)^3=\frac{1}{6}D^3$

〔t〕は，〔q〕に注意して，

$S^*=2\times$帆 P_1P_2 の面積$=2d^3$

$\therefore\quad S=\frac{4}{3}d^3=\frac{2}{3}\times 2d^3=\frac{2}{3}S^*$

補足　§4の最後の放物線 $y=x^2$，$y=ax^2$ の接線の引き方の少し上に次を入れます。

> 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の傾きは $2t$ である。　〔i_3〕
>
> 放物線 $y=ax^2$ 上の点 $(t,\ at^2)$ における接線の傾きは $2at$ である。　〔i_3^*〕

§8. 放物線における直交座標と斜交座標の関係

§7の図10のPQは〔p〕の $PQ=d^2$ を満たし，放物線のすばらしい性質であると述べました。それについて，以下に説明します。

図12は放物線 $y=x^2$ を描いたものです。縦の平行線は $0.25\left(=\frac{1}{4}\right)$ の間隔で引いてあります。横線は x 軸だけ引きました。図がごちゃつくので他は省き

ました。代わりに斜めに平行線が引いてあります。Pで引いた接線が1番下に，それから順に上へ ${}_{0.25}\ell_0$（接線），${}_{0.25}\ell_{0.25}$，${}_{0.25}\ell_{0.5}$，${}_{0.25}\ell_{0.75}$ ……です。これらは全部平行（§4 参照）で，傾きは〔i_2〕，〔i_3〕により $2t=2\times0.25=0.5$ です。また，接線 ${}_{0.25}\ell_0$ をX軸，直線PyをY軸と名付けています。そのときはPが原点です。（ただし，X軸だけは長さ $\sqrt{4t^2+1}$ の線分（図ではCD）を基準にして座標を目盛ります。）図12をよく見て下さい。X軸，Y軸を基準にして眺めると，図は図2と同じようになっているではありませんか。放物線の方程式は $Y=X^2$ となります。

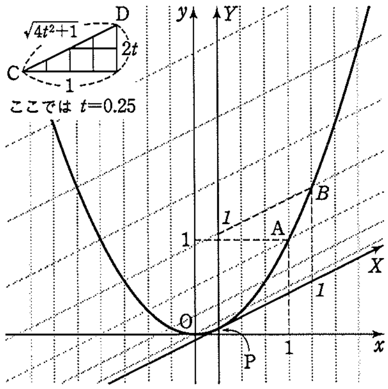


図12

X軸，Y軸を基準にして，$Y=X^2$ のグラフを描こうとすると，実は，既に眼前にあるのです。描きたければ，放物線 $y=x^2$ の上をなぞればいいのです。

$y=x^2$ と $Y=X^2$ は形が同じです。形は不変です。$y=x^2$ は永遠に不滅です。

放物線のはなしはこの辺でおしまいとします。

§9. おわりに

これを書き上げるのに，かなりの日数を要し，気分が変わるので表現が揺らいでいます。表記が曖昧になったりもします。例えばABと書いたとき，①直線AB　②線分AB　③線分ABの長さ　④2点A，B間の距離　⑤2数A，Bの積　⑥AとBの並び方，等さまざまな意味で使われています。そんなとき，皆さんは適切に判断してくれたでしょう。文章表現には相当苦労しました。国語力がいかに大切か，若いときはそれがよくわかっていませんでした。ずっと後悔しています。数学者であるお茶の水大学の藤原正彦教授は著書「祖国とは国語」（新潮文庫）の中で，小学校では「一に国語，二に国語，三，四がなくて五に算数，あとは十以下」，「アメリカで教えていた頃，学生の英語が余りにひどいので，レポートの英語を毎度添削せざるを得なかった。今，日本人の学生が同様になっている」と述べています。以下，要約すると，国語力低下は，知的活動能力・論理的思考力・情緒・祖国愛の低下を同時に引き起こしている。さらに「不況が何十年続こうと国は滅びないが，この四つの低下は確実に国を滅ぼす。（中略）祖国とは国語なのである」と述べています。皆さんも，いつかこの本を読んでみてください。また，「美」の大切さを多くの著書で実例を挙げて強調しています。私は，数学の答案に美と表現力を感じたときは喜ばしくなります。

このはなしは本校生徒の意欲に刺激されて書き上げたもので，野村昌人先生が原稿の§7まで目を通し，ミスを指摘して下さいました。感謝しています。

（愛知県立五条高等学校）