# いろいろな試み

## —外心・内心同時作図—
## —15° の三角比の値—

大塚（おおつか）　秀幸（ひでゆき）

## ■外心・内心同時作図

### §1. はじめに

数学Aで初等幾何を扱うが，ここで三角形の3心について学習する。3心はそれぞれの定義に基づいて簡単に作図することができる。

ところで，外心と内心の作図をする場合，別々の三角形を用意してそれぞれ別に求めようとするのが普通である。なぜならば，外心・内心を1つの三角形について作図しようとすると，作図跡が非常に多くなりわかりにくくなるからだ。

本稿では，外心・内心を効率よく1つの三角形に作図する方法を示す。

### §2. 外心・内心同時作図（その1）

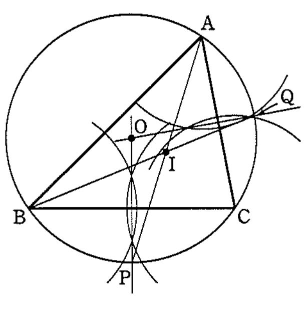
本稿テーマ「外心・内心同時作図」は，外心および外接円の作図をした後，その作図跡をうまく利用して内心を作図するものである。以下に作図手順を示すが，外接円の作図（ここまでは通常のもの）をした後，たった2本の直線を引くだけで内心が求まることに注目してほしい。

〈作図手順〉

① △ABC の外心Oを作図し外接円をかく。

② 辺BC，ACの垂直二等分線と外接円の交点P，Qを右図のようにとる。

③ 直線AP，BQを引き，その交点が内心Iである。



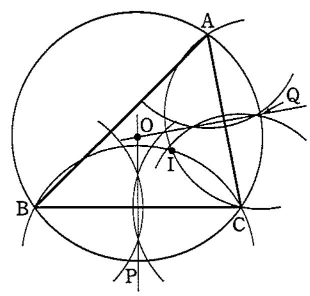

ここで，$\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{CP}$ より AP は ∠BAC の二等分線であり，$\overset{\frown}{AQ}=\overset{\frown}{CQ}$ より BQ は ∠ABC の二等分線であるから，内心の作図が正しいことがわかる。

### §3. 外心・内心同時作図（その2）

先ほどの作図手順③を次のようにしてもよい。

〈作図手順〉

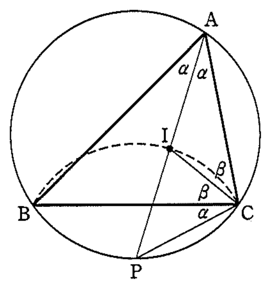
③ Pを中心とし頂点B，Cを通る円Pと，Qを中心とし頂点A，Cを通る円Qをかく。この2円P，Qの交点（Cでない方）が内心Iである。




この作図法が正しいことの根拠を以下に示そう。

まず，AP は ∠BAC の二等分線なので，内心Iは AP 上にあることに注意する。

$\angle BAI=\angle CAI=\alpha$,
$\angle ACI=\angle BCI=\beta$
とおくと，円周角の定理より，
$\angle BCP=\angle BAP=\alpha$
また，△PIC において
$\angle PIC=\angle PCI=\alpha+\beta$
となるので，PI=PC




つまり，内心IはPを中心，半径PCの円周上にある。

同様にして，内心Ｉ はQを中心，半径 QA の円周上にある。

ゆえに，上記作図法は成立する。

## §4. おわりに

今回の作図法の理屈は難しくはないが，なかなか気付かないと思ったので，本稿で紹介した。先生方が教材作成の際，内接円と外接円を同時に作図する必要があるときなど，今回の作図法により負担が多少軽減されると思う。

# ■15° の三角比の値

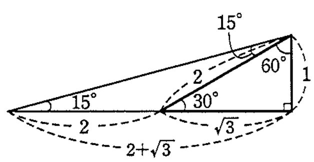
## §1. はじめに

15° の三角比の値は，15°=45°−30° となることから加法定理(数学II)で求めることができる。ところが，数学Ｉの段階では加法定理は使えないため，図形をうまく利用して定義に従って求めることになる。本稿では，あえて 15° の三角比の値を図形で求めることにこだわり，特に $\tan 15°=2-\sqrt{3}$ を導くことを目標とする。

## §2. スタンダードな解法

多くの教材で採用されているのは，次のような図形の利用である。

(0) スタンダードな方法



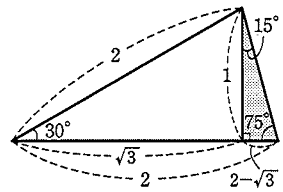

$$\tan 15°=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

この設定は非常にうまくできていて，説得力もある。ところが，通常の教材ではこの図形が先に与えられていて，自ら導いたという感じが得られない。設定そのものをいろいろと考える余地が残されているわけである。

## §3. その他のシンプルな解法

いろいろ試したところ，多くの設定の下で 15° の三角比の値が求まることがわかった。比較的スマートなものをここでは紹介しよう。(説明は最小限にしたいので，図から解法を察して欲しい)

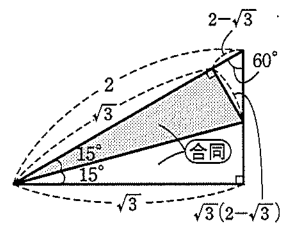
(1) 頂角 30° の二等辺三角形を利用する方法




$$\tan 15°=2-\sqrt{3}$$

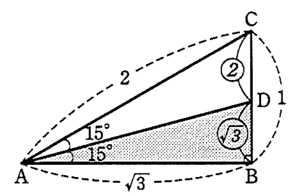
図形からダイレクトに結果が得られるのでこの方法が１番シンプルといえそうだ。

(2) 30° を含む直角三角形を用いる(合同を利用)




$$\tan 15°=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

(3) 30° を含む直角三角形を用いる(内角の２等分の性質を利用)




内角の２等分線の性質より

$$BD:CD=AB:AC=\sqrt{3}:2$$

よって，$BD=1\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

$$\therefore\ \tan 15°=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

## §4. おわりに

現実問題としては，数学IIで「加法定理」や「半角の公式」などを使って機械的に求めることができるので，今回のようにしつこく扱うことはない。しかし，純粋に幾何の問題として考えた場合，試行錯誤のできる面白い問題であると思う。本稿で扱ったもの以外にもいろいろな設定があるので，生徒への自由課題としてみるのもよいだろう。

(東京都　元文教大学付属高等学校)