続・作図と証明を重視した平面図形の指導方法

―オイラー線の定理を中間点とし，より系統的となった2007年度の取り組み―

岡（おか）　良夫（よしお）

§0. はじめに

以前この数研通信 No.53 において私のレポート「作図と証明を重視した平面図形の指導方法」を掲載していただいた。そこでは2004年度および2005年度の取り組みについて述べたのだが，今回その続編をここに提示したいと思う。

巷ではあいかわらず数学Aにおける平面図形は求値問題重視の傾向である。大学入試問題，特にマークシート方式に証明がなじまないのはやむをえないにしても，数学教育において平面図形のはたす論理的な役割をもっと重視すべきではないだろうか。

§1. 中点・中線・重心

作図の基本は線分の垂直二等分線であるが，そのうち垂直はひとまず置いて，まず中点だけに焦点をしぼってみた。以前紹介した2005年度の取り組みでは，作図指導の関係から垂直二等分線と外心を前に置いていたが，今回は系統性や証明により重きをおくため，逆の順序としたわけである。

ところで，証明というのは，仮定および既に証明済みの定理から結論を導く過程であるが，単に結論を得ればよいというものではなく，途中でどの定理を用いたかということも，教育上は重要である。それが論理的な思考力を養うことになるからである。

そういう観点から，重心の定理の証明は次のような流れが望ましいと考えた。すなわち，①頂点から2本の中線の交点をむすぶ直線を2倍の長さに延長する　②中点連結定理から平行を導く　③平行四辺形の対角線が互いの中点で交わる性質から3本目も中線であることを示す　というものである。

§2. 垂直二等分線・外心・外接円

重心の場合は3本の中線が1点で交わることを証明したが，その証明の方針は，まず2本の中線を引き，その交点と頂点を結ぶ（第3の）直線も中線であることを示すというものであった。

外心の場合も同様の方針である。すなわち，2本辺の垂直二等分線を引き，その交点から第3の辺（またはその延長）におろした垂線が辺の垂直二等分線でもあることを示す。ただし，垂直は既に言えているわけだから，結局その垂線が辺の中点を通ることだけを言えばよいことになる。

このように，導くべき結論はできるだけ1つに絞り込む（この場合，垂線が辺の中点を通る）ことが重要であり，外心の定理の証明は重心の場合よりも1つレベルがあがったと言えるだろう。

§3. 円周角の定理と円周角の定理の逆

三角形の3辺の垂直二等分線が1点で交わることが証明されたことから，その外心を中心とする3頂点を通る円（三角形の外接円）の話に自然と移行していくことになる。

ところで，垂直二等分線の作図は基本中の基本だが，それがきちんとできているかをチェックするのにこの外接円の作図は最適である。また，見方を変えると円の中に三角形があるわけだから，円周角の定理とその周辺のもの（その逆や円に内接する四角形の性質・条件）とのつながりがよいと思う。

なお，円周角の定理は中学校で履修済みだが，その逆の証明はここで初めて学習することになる。その理由は，この証明が「転換法」で，背理法の一種と考えられるからである。これは，論理的には非常に重要なものである。

§4. 円に内接する四角形の性質・条件

どの教科書も「円周角の定理とその逆」の後は，「円に内接する四角形の性質・条件」を扱っている。このうち，性質のほうは円周角の定理から容易に導けるが，問題は「条件」のほうである。これも実は「転換法」で証明すべきものなのだが，教科書では既に証明されている円周角の定理の逆を用いる証明が主流である。それは確かに論理的には正しいのだが，私はあえて教育的配慮から，転換法を使って「条件」を証明させるように考えてみた。

やはり，この場合も三角形の外角はそれと隣り合わない内角よりも大きいということを利用している。このように，証明すべき場面が少し変わっても同様の手法を使うということで初めて学習効果があがるのではないだろうか。

§5. 三角形の垂心

三角形の5心とよく言われるが，重心・外心・内心は学習指導要領で教えるべき内容となっているが，垂心（と傍心）はそうではない。

しかし，数学IIの図形と方程式において垂心はよく登場するため，それと比較する上で数学Aの平面図形でも扱うべき内容であると認識している。

また，この証明のために円周角の定理とその逆，円に内接する四角形の性質・条件の，合わせて4つの定理をうまく複合的に利用するという点から，証明あるいは論理の指導に最適の題材であると考えた。

そして後述するように，重心・外心・垂心には1直線上に並ぶ（オイラー線）という美しい関係があるのでぜひともとりあげたいと思った。

ふつう教科書では，もとの三角形を4枚合わせて作った（辺の長さが2倍の相似形の）三角形を考え，前者の垂線が後者の垂直二等分線であることを使って証明する。つまり，すでに後者において垂直二等分線は1点で交わる（外心）は証明済みなので，前者において垂線も1点で交わることが示される。

確かにこれはある意味合理的な証明法なのだが，私は前述したように，円周角の定理とその逆，円に内接する四角形の性質・条件を，互いに助け合う定理群としてとらえさせるためにあえて面倒なやり方で3垂線が1点で交わることを証明させたかった。

§6. オイラー線　外心・重心・垂心の関係

私がオイラー線に初めて接したのは教科書の章末問題であったが，最初その証明の意味がよくわからなかったことを覚えている。

そもそも3点が1直線上に並ぶことはどういうことなのか。そして，それをどういう論理で証明しているのかがわかりにくかった。実はこれは3直線が1点で交わる（重心・外心・垂心・内心）と双対のものであるが，証明の難度は高いと言えるだろう。

前者が結構例が多いのに対して，後者は少ない。このオイラー線の他に初等的に証明できそうなのはシムソン線（三角形の外接円の3頂点を除く任意の点から，対辺あるいはその延長におろした垂線の足は1直線上に並ぶ）程度しか思い浮かばない。

ただし，シムソン線の場合，2つの角を1つに集めてその和が180°であることを示すという証明であったが，オイラー線の場合はさらに工夫したものとなっている。と言っても，使っているのは中点連結定理や平行四辺形，そして三角形の相似という基本的なものばかりなのだが，証明の流れという点では非常に参考になる証明である。

§7. これ以降の展開

オイラー線を中間点とした理由は，それ以降の内容が主に円の接線をポイントとするからである。

すなわち，中学校から移行してきた接弦定理，三角形の内心，方べきの定理，2つの円の位置関係，というものが学習すべき内容として残っている。

作図的にはオイラー線までの前半に比べるとレベルが高い。三角形の角の二等分線の作図自体は簡単だが，その交点（内心）を中心として3辺に接する円をかく際，1カ所隙間ができてしまうのである。

§8. 結論

教科書は内容羅列的な傾向になりやすい。重心と外心と内心をまとめて扱っていて，それらの関係は（教科書上は）全くない。これでは，論理的な思考を養うというよりは，知識を与えるだけになってしまう。それらを如何に有機的につなげるかは教師の仕事であり，以上述べた順序で学習すれば，幾分かは証明に興味を持ってもらえるのではないだろうか。

（滋賀県立栗東高等学校）

Date: ______________________ **mathematics A study sheet** No.19

1st grade class: ____________ number: ____________ name: ____________

This time's theme:

中点・中線・重心

(1) 下に線分ABをかき(長さは適当でよいが，定規でかくこと)，その線分ABの中点を作図で(コンパスと定規を使って)求めなさい。

(2) 下に△ABCをかき，3辺の中点を作図で求め，中線(辺の中点と頂点を結ぶ線分)3本を作図で求めなさい。

(3) 「三角形の中線３本が１点で交わる」ことを，次の手順で証明しなさい。

① 下に△ABC をかき，AC の中点をＭ，AB の中点をＮとし，中線 BM，CN の交点をＧとする。ＡとＧを結ぶ直線と辺 BC の交点をＬとする。(これは作図でないので，だいたいでよい)

② 仮定(前もって成り立つこと)を記号で下にまとめなさい。

③ 結論(最終的に言いたいこと)を記号で下にまとめなさい。

④ ①の図をもう一度改めてかいた後，線分 AG の延長線上に AG＝GH となるような点Ｈをとり，ＢとＨ，ＣとＨを線分で結ぶ。(こういう線を補助線という)

⑤ △ABH に注目し，中点連結定理を使うと何が言えるかを下にまとめなさい。

⑥ △ACH に注目し，中点連結定理を使うと何が言えるかを下にまとめなさい。

⑦ ⑤と⑥のことから，四角形 GBHC はどういう四角形と言えるか。また，そのことから点Ｌはどういう点と言えるか。

※ これで定理「三角形の中線３本が１点で交わる」が証明された。その点のことを重心という。

※ 定理からすぐ言えることを「系」という。この場合，重心が中線を(頂点のほうから，中点のほうにむけて)一定の比に分けるというのが系である。次の比がいくらになるかを求めよ。

AG：GL＝

BG：GM＝

CG：GN＝

Date: mathematics A study sheet No.20

1st grade class: number: name:

This time's theme:

垂直二等分線・外心・外接円

(1) 下に線分 AB をかき，その線分 AB の垂直二等分線を作図で求めなさい。

(2) 下に直線 AB をかき，その直線上にない点Pから直線 AB におろす垂線を作図で求めなさい。

(3) 下に鋭角三角形(3つの角がすべて 90° より小さい三角形) ABC をかき，3辺の垂直二等分線を作図で求めなさい。

(4) 「三角形の３辺の垂直二等分線３本が１点で交わる」ことを，次の手順で証明しなさい。

① 下に△ABC をかき，AC の中点を M，AB の中点をNとし，AC の垂直二等分線と AB の垂直二等分線の交点をOとする。その点Oから直線 BC におろす垂線を引き，その足（BC との交点）をLとする。（これは作図でないので，だいたいでよい）

② 仮定（前もって成り立つこと）を記号で下にまとめなさい。

③ 結論（最終的に言いたいこと）を記号で下にまとめなさい。

④ △OAB に注目すると，何が言えるかを下にまとめなさい。

⑤ △OAC に注目すると，何が言えるかを下にまとめなさい。

⑥ ④と⑤のことから，△OBL と△OCL についてどういうことが言えるか。また，そのことから点Lはどういう点と言えるか。

※ これで定理「三角形の３辺の垂直二等分線３本が１点で交わる」が証明された。その点のことを外心という。また，この外心は三角形の外接円の中心である。

(5) 下に直角三角形 ABC をかき，その外心Oを作図で求め，外接円も作図しなさい。

(6) 下に鈍角三角形（１つの角が 90° より大きい三角形）ABC をかき，その外心Oを作図で求め，外接円も作図しなさい。

Date: mathematics A study sheet No.21

1st grade class: number: name:

This time's theme:

円周角の定理と円周角の定理の逆

(1) 円周角の定理「１つの弧に対する円周角は一定で，その弧に対する中心角の半分である」を次の手順で証明しなさい。

① 下に円O(中心が点Oである円) をかき，その円周上に３点 A，B，P をとる。このとき，∠APB が (弧 AB に対する) 円周角，∠AOB が中心角である。PO の延長線と円周との交点をQとする。

② △OPA とその外角 ∠AOQ に注目したとき，∠OPA と ∠AOQ について言えることを下にまとめなさい。

③ △OPB とその外角 ∠BOQ に注目したとき，∠OPB と ∠BOQ について言えることを下にまとめなさい。

④ ②と③から言えることを，記号で下にまとめなさい。

※ これで円周角の定理が証明された。

(2) 円周角の定理の逆

「2点C，Pが直線ABに関して同じ側にあるとき，∠APB＝∠ACB ならば，4点A，B，C，Pは同一円周上にある」を次の手順で証明しなさい。

① 3点A，B，Cを通る円をかきなさい。(この円は△ABCの外接円である。) 残りの1点Pがこの円の内部にある図をかいた後，直線BPと円の交点をC′とするとき，円周角の定理から言えることを記号で下にかきなさい。

② △APC′とその外角∠APBに注目したとき，∠APBと∠AC′Pの大小について言えることを下にかきなさい。

③ ①と②から，∠APBと∠ACBの大小について言えることを下にかきなさい。

④ 3点A，B，Cを通る円をかきなさい。(この円は△ABCの外接円である。) 残りの1点Pがこの円の外部にある図をかいた後，直線BPと円の交点をC″とするとき，円周角の定理から言えることを記号で下にかきなさい。

⑤ △APC″とその外角∠AC″Bに注目したとき，∠AC″Bと∠APC″の大小について言えることを下にかきなさい。

⑥ ④と⑤から，∠APBと∠ACBの大小について言えることを下にかきなさい。

⑦ ③と⑥から，点Pは円の内部にあっても，外部にあっても，∠APB＝∠ACBという仮定に反するので，円周上にあるしかない。これで証明終わり。

※ このような証明法を「転換法」という。)

Date: ______________________ **mathematics A study sheet** No.22

1st grade class: ____________ number: ____________ name: ____________

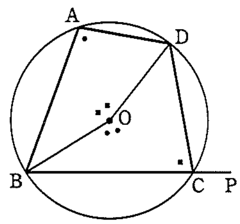
This time's theme:

円に内接する四角形の性質・条件

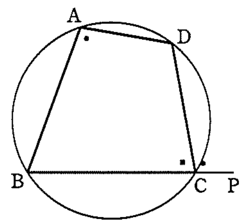
(1) 円に内接する四角形の性質について，次の問いに答えなさい。

① 下に（コンパスで）円Oをかき，その円周上に4点A，B，C，Dを，この順に一周するようにとり，その4点を線分で結んで四角形ABCDをかきなさい。【これを「円に内接する四角形」という】

② 次の図で，$\angle BAD + \angle BCD = 180°$ であることを証明しなさい。
円に内接する四角形の性質 1



③ 次の図で，$\angle BAD = \angle DCP$ であることを証明しなさい。
円に内接する四角形の性質 2

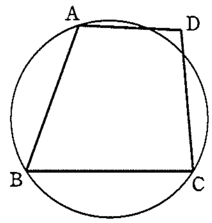


(2)　円に内接する四角形の条件について，次の問いに答えなさい。

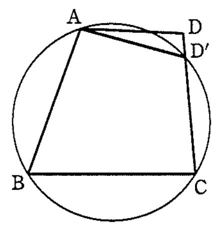
四角形 ABCD をかき，そのうち 3 点 A，B，C を通る円（この円は △ABC の外接円）をかいたとする。

①　点Dが円の外部にある場合，次の図で，$\angle B+\angle D<180^\circ$ を証明せよ。

点Dが円の外部にある場合

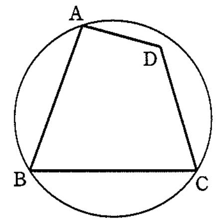


点Dが円の外部にある場合

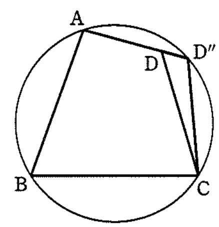


②　点Dが円の内部にある場合，次の図で $\angle B+\angle D>180^\circ$ を証明せよ。

点Dが円の内部にある場合



点Dが円の内部にある場合



③　①と②から，点Dが円の外部にあっても，内部にあっても，$\angle B+\angle D=180^\circ$ という仮定に反するので，点Dは円周上にあるしかない。これで証明終わり。

∴　四角形の向かい合う内角の和が 180° のとき，この四角形は円に内接する。

※　以上のことを「円に内接する四角形の条件」という。

Date: ____________________ **mathematics A study sheet** No.23

1st grade class: ____________ number: ____________ name: ____________

This time's theme:

三角形の**垂心**

(1)　三角形の頂点から対辺におろした垂線の性質について調べるため，次の手順で図を書きなさい。

①　下に △ABC をかく。

②　頂点Aから対辺 BC に垂線を引き，その足(交点のこと)をDとする。

③　頂点Bから対辺 AC に垂線を引き，その足をEとする。

④　この２本の垂線の交点をHとし，頂点CとこのHを結ぶ直線と辺 AB との交点をFとする。

(2)　この図で，AD⊥BC，BE⊥CA である。(“⊥”は垂直の意味)　このことから，円に内接する四角形２つを見つけ，下線にかきなさい。

四角形 ____________

四角形 ____________

(3)　もし，CF⊥AB ならば，円に内接する四角形がさらに４つあることがわかる。それを下線にかきなさい。

四角形 ____________

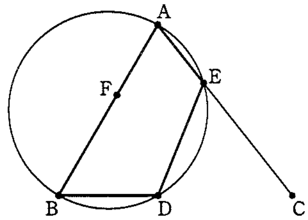
四角形 ____________

四角形 ____________

四角形 ____________

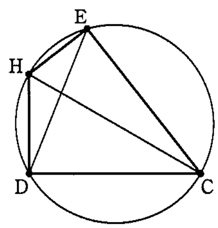
(4) 四角形 ABDE に注目して，∠FBD＝∠CED を証明しなさい。

垂心の定理



(5) 四角形 DCEH に注目して，∠CED＝∠CHD を証明しなさい。

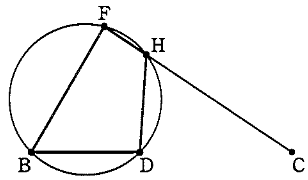
垂心の定理



(6) 上の 2 つの式から，何が言えるかをかきなさい。

(7) さらに，以上のことから四角形 BDHF について何が言えるかを答えなさい。

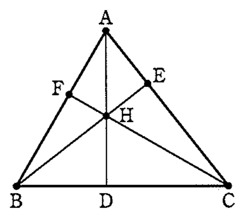
垂心の定理



(8) ここで，∠HFB＋∠HDB＝180° であり，もともと ∠HDB＝90° であったので，∠HFB＝90° であるから，CF は垂線ということになり，証明終わり。

∴ 三角形の 3 頂点から対辺（またはその延長線）におろした垂線は，1 点で交わる。（それを三角形の「垂心」という）

垂心の定理



Date: ______ **mathematics A study sheet** No.24

1^{st} grade class: ______ number: ______ name: ______

This time's theme:

オイラー線

外心・重心・垂心の関係

(1) 下に△ABCを定規でかき，次の手順で外心O，重心G，垂心Hを作図しなさい。

① 辺BCの垂直二等分線と辺ACの垂直二等分線を引き，その交点をOとする。

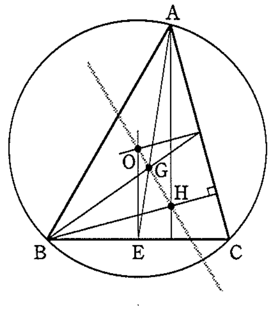
② 辺BCの中点をE，ACの中点をMとし中線AEと中線BMの交点をGとする。

③ 頂点Aから対辺BC（または延長線）へ引いた垂線と，頂点Bから対辺CA（または延長線）へ引いた垂線との交点をHとする。

オイラー線の定理

どんな三角形においても，外心 O，重心 G，垂心 H は必ず一直線上にある。（その直線を「オイラー線」という）

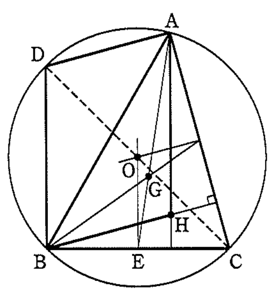
オイラー線の定理



次の手順で オイラー線の定理 を証明せよ。

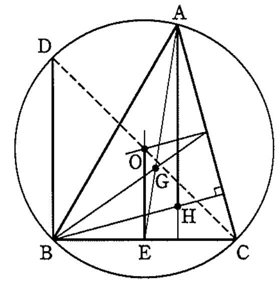
(2) 下の図で，四角形 ADBH が平行四辺形であることを証明しなさい。

オイラー線の定理



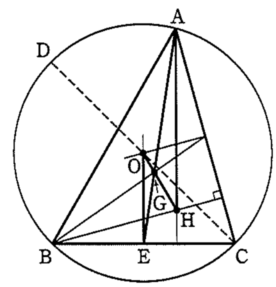
(3) 下の図で，AH：EO＝2：1 を証明しなさい。

オイラー線の定理



(4) 下の図で，△AGH∽△EGO を証明しなさい。

オイラー線の定理



(5) △AGH∽△EGO であることと，もともと 3 点 A，G，E が一直線上にあることから，3 点 O，G，H は一直線上にあることがわかる。証明終わり。