# 巡回不等式特集

大塚（おおつか）　秀幸（ひでゆき）

## §1. はじめに

昔の話ではあるが，絶対不等式の証明についてはじめて学んだとき $x+\dfrac{1}{x}\geqq 2$ $(x>0)$ という問題に出会い，とても不思議な感じがしたのを今でも覚えている。この問題は単に相加・相乗平均の関係を使えば難なく示せてしまうのだが，私にとっては今でも好きな式の１つである。

最近では，文献１で紹介されていた「Shapiro の不等式」に魅せられ，不等式についていろいろ考察するきっかけとなった。

## §2. Shapiro の不等式

以下のように，いくつかの変数がサイクリックに入っている不等式を「巡回不等式」と呼ぶ。

> Shapiro の不等式
>
> $$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqq\frac{n}{2}$$
>
> $(a_i>0,\ n\geqq 3)$

上記の巡回不等式を「Shapiro の不等式」（$n=3$ のとき特に「Nesbitt の不等式」）といい，$n$ が 12 以下の偶数と 23 以下の奇数で成り立つことがわかっている。

Shapiro の不等式を意識しながらオリジナルの巡回不等式の作成およびその証明を試みた。本稿は，今回作成した不等式の証明を通し，不等式のもつ奥深さを伝えることを目標とする。

## §3. Nesbitt の不等式の証明

本題に入る前に，参考として Nesbitt の不等式を証明しておこう。あらためて書くと次のようになる。

> Nesbitt の不等式
>
> $$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqq\frac{3}{2}\quad(x>0,\ y>0,\ z>0)$$

（証明）　(i)　$\{(y+z)+(z+x)+(x+y)\}$

$$\times\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)$$

$$\geqq\left(\sqrt{\frac{y+z}{y+z}}+\sqrt{\frac{z+x}{z+x}}+\sqrt{\frac{x+y}{x+y}}\right)^2=9$$

（コーシー・シュワルツの不等式）

(ii)　$2(x+y+z)\left(\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}+\dfrac{1}{x+y}\right)$

$$=2\left(3+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

(i)(ii)から　$2\left(3+\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right)\geqq 9$

よって　$\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\geqq\dfrac{3}{2}$　　（証明終）

## §4. 定理（巡回不等式）

本稿では証明の内容が明確に伝わるように，３変数のものについてのみ考える。

> **【定理】**　$x>0,\ y>0,\ z>0$ に対し以下の不等式が成り立つ。
>
> (I)　$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$
>
> $\geqq 4\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right)$
>
> (II)　$2\left(\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\right)\geqq\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$
>
> (III)　$\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\geqq 2\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right)$
>
> (IV)　$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\geqq\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{3}{2}$
>
> (V)　$\left(\dfrac{x}{y}\right)^z+\left(\dfrac{y}{z}\right)^x+\left(\dfrac{z}{x}\right)^y>2$

## §5. 証明の準備

ここでは，準備として証明に必要な補題を２つ示しておく。

【補題１】 $a^3+b^3\geqq ab(a+b)$

（証明） $(\text{左辺})-(\text{右辺})=a^3+b^3-a^2b-ab^2$

$$=a(a^2-b^2)+b(b^2-a^2)$$
$$=(a^2-b^2)(a-b)$$
$$=(a-b)^2(a+b)\geqq 0$$

（証明終）

【補題２】 $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

（証明）

$$2\{(\text{左辺})-(\text{右辺})\}=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$
$$\geqq 0$$

（証明終）

## §6. 定理の証明

(I) $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}\geqq 4\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right)$

（証明）

$$(\text{右辺})=2\left(\frac{2}{y+z}\times x+\frac{2}{z+x}\times y+\frac{2}{x+y}\times z\right)$$
$$\leqq 2\left(\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{2}\times x+\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}{2}\times y+\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\times z\right)$$

（相加・調和平均の関係）

$$=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$$
$$=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$$

（証明終）

(II) $2\left(\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\right)\geqq\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$

（証明） （左辺）−（右辺）

$$=\left(\frac{2x^2}{yz}-\frac{y+z}{x}\right)+\left(\frac{2y^2}{zx}-\frac{z+x}{y}\right)+\left(\frac{2z^2}{xy}-\frac{x+y}{z}\right)$$
$$=\frac{2x^3-yz(y+z)}{xyz}+\frac{2y^3-zx(z+x)}{xyz}+\frac{2z^3-xy(x+y)}{xyz}$$
$$\geqq\frac{2x^3-(y^3+z^3)}{xyz}+\frac{2y^3-(z^3+x^3)}{xyz}+\frac{2z^3-(x^3+y^3)}{xyz}\quad(\because\ \text{補題１})$$
$$=0$$

（証明終）

(III) $\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\geqq 2\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right)$

（証明） (I)，(II)により成り立つ。 （証明終）

(IV) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\geqq\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{3}{2}$

（証明） $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{y+z}\right)+\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{y}{z+x}\right)+\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{z}{x+y}\right)$

$$=\frac{xz}{y(y+z)}+\frac{xy}{z(z+x)}+\frac{yz}{x(x+y)}\quad\cdots\cdots(\bigstar)$$

ここで，$A=y(y+z)$，$B=z(z+x)$，$C=x(x+y)$ とおき，次の(i)，(ii)を示そう。

$$\begin{cases}\text{(i)}\quad (Axz+Bxy+Cyz)\left(\dfrac{xz}{A}+\dfrac{xy}{B}+\dfrac{yz}{C}\right)\\ \qquad\geqq 3xyz(x+y+z)\\ \text{(ii)}\quad 3xyz(x+y+z)=\dfrac{3}{2}(Axz+Bxy+Cyz)\end{cases}$$

〈(i)を示す〉

$$(Axz+Bxy+Cyz)\left(\frac{xz}{A}+\frac{xy}{B}+\frac{yz}{C}\right)$$
$$\geqq\left(\sqrt{Axz\times\frac{xz}{A}}+\sqrt{Bxy\times\frac{xy}{B}}+\sqrt{Cyz\times\frac{yz}{C}}\right)^2$$

（∵ コーシー・シュワルツの不等式）

$$=(xz+xy+yz)^2$$
$$=(xz)^2+(xy)^2+(yz)^2+2(xz)(xy)+2(xz)(yz)+2(xy)(yz)$$
$$\geqq 3(xz)(xy)+3(xz)(yz)+3(xy)(yz)\quad(\because\ \text{補題２})$$
$$=3xyz(x+y+z)$$

よって，(i)が示された。

〈(ii)を示す〉

$$\{(\text{左辺})-(\text{右辺})\}\div 3$$
$$=xyz(x+y+z)-\frac{1}{2}(Axz+Bxy+Cyz)$$
$$=xyz(x+y+z)-\frac{1}{2}\{xyz(y+z)+xyz(z+x)+xyz(x+y)\}$$
$$=xyz(x+y+z)-xyz(x+y+z)=0$$

よって，(ii)が示された。

(i)，(ii)により，

$$(Axz+Bxy+Cyz)\left(\frac{xz}{A}+\frac{xy}{B}+\frac{yz}{C}\right)$$
$$\geqq\frac{3}{2}(Axz+Bxy+Cyz)$$

したがって，$\dfrac{xz}{y(y+z)}+\dfrac{xy}{z(z+x)}+\dfrac{yz}{x(x+y)}\geqq\dfrac{3}{2}$

(★) により

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqq\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{3}{2}$$

(証明終)

(V) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^z+\left(\dfrac{y}{z}\right)^x+\left(\dfrac{z}{x}\right)^y>2$

(証明) ここで，$x$ が最大であると仮定しても一般性を失わない。

(i) $x\geqq y\geqq z>0$ のとき

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\geqq1$，$\left(\dfrac{y}{z}\right)^x\geqq1$ により，

$$\left(\frac{x}{y}\right)^z+\left(\frac{y}{z}\right)^x+\left(\frac{z}{x}\right)^y>2$$

(ii) $x\geqq z\geqq y>0$ のとき

$\left(\dfrac{z}{x}\right)^y\geqq\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$ により，

$$\left(\frac{x}{y}\right)^z+\left(\frac{y}{z}\right)^x+\left(\frac{z}{x}\right)^y>\left(\frac{x}{y}\right)^z+\left(\frac{y}{x}\right)^z$$
$$\geqq2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(\frac{y}{x}\right)^z}=2$$

(∵ 相加・相乗平均の関係)

よって，(i)，(ii)から(V)は証明された。

(証明終)

## §7. 最後に

絶対不等式の証明は焦点をあててみると実に奥が深いことがわかる。そして，実際の授業でうまく活用されれば幸いである。

なお，定理(Ⅲ)を一般化した証明を参考文献〔3〕で紹介しているので参考にしてほしい(全く別の証明法)。

最後に，興味深い不等式を2つ紹介しておこう。

$x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき

① $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\geqq\dfrac{x+y}{y+z}+\dfrac{y+z}{z+x}+\dfrac{z+x}{x+y}$

② $x^y+y^x>1$

(証明はふせておきますので，挑戦してみて下さい)

《参考文献》

〔1〕 不等式への招待(p.28～30) 近代科学社
大関信雄・大関清太著

〔2〕 PlanetMath.Org「Shapiro inequality」
「proof of Nesbitt inequality」
・http:// planetmath. org/encyclopedia/ ShapirosInequality. html
・http://planetmath.org/?op=getobj&from =objects&id=2876

〔3〕 数学セミナー 2005年2月号 日本評論社
「ある巡回不等式」大塚秀幸

〔4〕 数学セミナー 2007年9月号 日本評論社
「中間数の巡回不等式」大塚秀幸

(東京都 元文教大学付属高等学校)