高校生のための

放物線のはなし(part 1)

今井 武彦

§0. はじめに

これから $y=ax^2$ (a は 0 でない定数)のグラフ(放物線 $y=ax^2$ という)の性質を丁寧に説明します。1年生が学習する範囲を少し越えるところまで発展しますが，わかりやすく述べる積りですから紙と鉛筆を用意して一つ一つ確かめながら読み進んで下さい。教科書と重複するところはできるだけ省きました。見慣れない用語を発明(?)しましたが，意味を定め(定義し)てありますから数学(学問)とはそんなものかと思って進んで下さい。

§1. 自然数の平方について

自然数全体の集合Nを奇数の集合Oと偶数の集合Eに分けますと

O=$\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\cdots\}$

E=$\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\cdots\}$

Eの中で(自然数の中で)

小さい方から n 番目の偶数は $2n$ である。〔a〕

Oの中で(自然数の中で)

小さい方から n 番目の奇数は $2n-1$ である。〔b〕

これを使って，4番目の奇数は $2\times4-1=7$，365番目の奇数は $2\times365-1=729$ のように求めることができます。

次に，自然数を2乗(平方)した数全体の集合SとSに 0^2 を追加した集合S* を考えます。

すなわち

S=$\{1^2, 2^2, 3^2, \cdots\cdots, n^2, \cdots\cdots\}$

S*=$\{0^2, 1^2, 2^2, \cdots\cdots, (n-1)^2, n^2, \cdots\cdots\}$

n が自然数のとき，S* の中の n^2 とその1つ前の整数 $(n-1)^2$ の差を計算すると

$$n^2-(n-1)^2=n^2-(n^2-2n+1)$$
$$=2n-1$$

〔b〕を意識して，上の結果を次のように認識します。

自然数 n の2乗とその1つ前の整数 $n-1$ の2乗の差は n 番目の奇数である。 $n^2-(n-1)^2=2n-1$ 〔c〕

上では，自然数の中で小さい方から n 番と記すべきところを単に n 番と表しました。以後も同様に思って下さい。

〔c〕は表現を変えると

$n^2=(n-1)^2+(2n-1)$ 〔d〕 自然数 n の2乗はその1つ前の整数 $n-1$ の2乗に n 番目の奇数を加えたものである。

したがって，次のようになっていきます。

$1^2=0^2+1=1$

$2^2=1^2+3=1+3$

$3^2=2^2+5=1+3+5$

$4^2=3^2+7=1+3+5+7$

$\vdots$

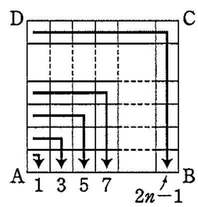
これを続けていくと，一般的に

$$n^2=(n-1)^2+(2n-1)$$
$$=1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)$$

すなわち

$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$ 〔e〕 奇数を n 番目まで足した和は n^2 に等しい。

〔e〕を直感的に正しいと認める方法があります。右図のように1辺の長さが n の正方形ABCDを考え，それに1辺の長さ1の正方形のタイルを敷き詰める思考実験をします。タイルは全部で n^2 個必要です。タイルを剥して，今度は矢印↴に従ってAの隅から順に敷き詰めていくと



全部で

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)$$

個必要です。だから，〔e〕は正しいのです。

§2. 放物線 $y=x^2$ の描き方

nが自然数のとき，点が放物線 $y=x^2$ の上を動いて点 $\mathrm{P}(n-1,\ (n-1)^2)$ から点 $\mathrm{Q}(n,\ n^2)$ まで移ったとします。図1を参照して下さい。このとき，x座標が1増えたのに対しy座標はどれだけ増えたでしょうか。それは，§1の〔c〕の計算をすることになりますから，n番目の奇数 $2n-1$ です。

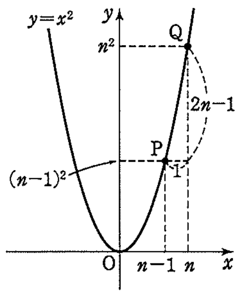


図1

したがって，放物線 $y=x^2$ を描くには図2のようにします。すなわち，放物線の頂点（今の場合は原点）を出発点にして右に $d=1$ 進んでから上方に1進んだ点をとります。次いで，その点から右に $d=1$ 進んでから上方に3進んだ点をとります。さらに，その点から右に1進んでから上方に5進んだ点をとります。このような操作を続けます。つまり，次の手順を踏みます。

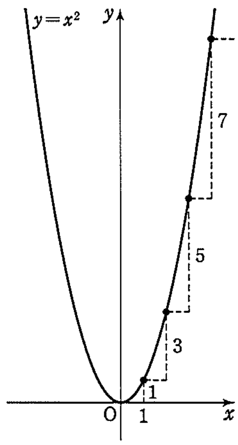


図2

i）頂点を出発点として，右に $d=1$ 進むごとに上方に順に

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots \qquad 〔f〕$$

と奇数分だけ進んだ点をとっていく。

ii）それらの点を滑らかな曲線で結んでいく。（これで右半分ができあがります。）

iii）y軸に関して右半分と対称になるように左半分を描く。

以上のようにまとめておきます。

注1 上の考察では $d=1$ として論を進めましたが，実は，dがどんな正の数kであっても頂点から右に $d=k$ 進むごとに点は上方に $1k^2,\ 3k^2,\ 5k^2,\ 7k^2,\ \cdots\cdots$進みます。これらの比は

$$1:3:5:7:\cdots\cdots \qquad 〔g〕$$

で奇数の連続です。確かめましょう。

注2 放物線 $y=ax^2$ を描くには，本論での手順 i）の中の〔f〕を下の〔f′〕に変えます。

$$1a,\ 3a,\ 5a,\ 7a,\ \cdots\cdots \qquad 〔f'〕$$

これも簡単な計算で確かめることができます。

これらの比は，やはり〔g〕です。

問1 上の手順にしたがって，次のグラフを描け。

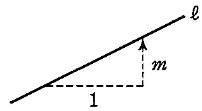
(1) $y=x^2$　(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2$　(3) $y=\dfrac{1}{3}x^2$

§3. 直線について

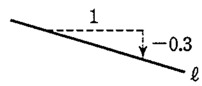
次に進む前に直線について少し復習します。

先生 x軸に垂直でない直線ℓの傾きがmであるとはどういうことでしょうか。

生徒 点がℓ上を動いてx座標が1増えるとき，y座標がm増えるということです。図の通りです。



先生 その通り。与えてくれたのは $m>0$ のときの図です。



$m=-0.3$ とき，-0.3増える

という言い方を日常生活ではしませんが，数学では0.3減るという意味にとることを承知の上で答えてくれたと思います。

2点(2，6)，(5，8)を通る直線ℓ'の傾きmの値を求めてみます。

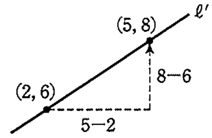
点が直線ℓ'上を(2，6)から(5，8)まで動いたとき，

x座標はどれだけ増えたか

$\Longrightarrow 5-2=3$

y座標はどれだけ増えたか

$\Longrightarrow 8-6=2$

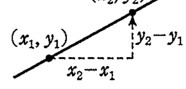


ℓ'上を点が動いて，x座標が3増えたときy座標が2増えたということは，x座標が1増えるときy座標は$\dfrac{2}{3}$増えることになります。よって，2点(2，6)，(5，8)を通る直線の傾きは

$$m=\frac{8-6}{5-2}=\frac{2}{3}$$

の計算で求めます。一般的に述べますと，

$x_1 \neq x_2$ のとき，2点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線の傾きをmとすると　図3



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \text{〔h〕}$$

図3は，$x_1<x_2$，$y_1<y_2$ として描いたものですが，他の場合でも〔h〕で計算してよろしい。

§4. 放物線と接線

ここでは表記を簡潔にするために，点Aを通り x 軸に平行な直線を $\mathrm{A}x$，y 軸に平行な直線を $\mathrm{A}y$ のように表すことにします。このように表すことにしておきますと，直線 $\mathrm{O}x$ と書けば x 軸，$\mathrm{O}y$ と書けば y 軸となります。

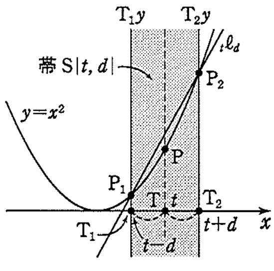


図4

これから，放物線 $y=x^2$ の性質を調べます。x 軸上に点 $\mathrm{T}(t,\ 0)$ を固定し，その左右に d だけ離れた点 $\mathrm{T}_1(t-d,\ 0)$，$\mathrm{T}_2(t+d,\ 0)$ をとります。図4を参照しながら読んで下さい（$d>0$ です）。

次に，直線 T_1y，T_2y を引きます。そして，2直線 T_1y，T_2y で挟まれた帯状の範囲を単に帯と呼ぶことにし，記号で $\mathrm{S}|t,\ d|$ と表すことにします。また，t を帯の中心，$2d$ を帯の幅，d を折り幅ということにします。

さて，2直線 T_1y，T_2y が放物線と交わる点をそれぞれ P_1，P_2 とします。座標を添えると，
$\mathrm{P}_1(t-d,\ (t-d)^2)$，$\mathrm{P}_2(t+d,\ (t+d)^2)$ です。

直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を ${}_t\ell_d$ と表すことにします。${}_t\ell_d$ の傾きを計算します。§3の公式〔h〕にあてはめて，

$$m=\frac{(t+d)^2-(t-d)^2}{(t+d)-(t-d)}=\frac{4td}{2d} \qquad \text{〔}i_1\text{〕}$$

右辺を約分して，$m=2t$ 〔i_2〕

上で求めた単純な式〔i_2〕は，深い真理を秘めています。秘密の扉を開けます。

上の計算を振り返ってみます。傾き m を求めるために帯 $\mathrm{S}|t,\ d|$ の中心 t と折り幅 d でできた式から計算を始めたのが〔i_1〕です。そして，〔i_2〕の結果を得ました。よく見ると，〔i_2〕の式には折り幅 d が見あたりません。扉の向こう側の花園に隠れてしまったようです。${}_t\ell_d$ の傾きは帯の中心 t だけで決まります。その2倍です。〔i_2〕からすごいことがわかります。

Tは固定した点でしたから，t は定数です。帯の折り幅 d を大きしていくと直線 T_1y は左の方へ，直線 T_2y は右の方へ同じ距離動きます。折り幅が広がり，直線 ${}_t\ell_d$ は上の方へ移動します。ところが，傾きは $2t$ で変動しません。つまり，${}_t\ell_d$ は平行に動くことが観測されるのです。

逆に，折り幅 d を小さくして0に近づけていくと，直線 ${}_t\ell_d$ は下の方へ平行に動きます。

折り幅 t はいくらでも大きくできますが，小さくしようとするときは0よりも小さくはできません。ですから，${}_t\ell_d$ を下げようとすると行く手を阻む壁が目に入るわけです。

先生　その壁とは何でしょう。

生徒　接線です。Pで放物線に接しています。傾きは，${}_t\ell_d$ のと同じで $2t$ です。質問があります。図4の放物線が $y=ax^2$ のグラフだったとしたら直線 ${}_t\ell_d$ の傾きは $a\times 2t$，つまり $2at$ になるような気がしますが，正しいでしょうか。

先生　接線で正解です。その接線を ${}_t\ell_0$ と表すことにします。質問については，次を読んで下さい。

図4の中の方程式 $y=x^2$ を $y=ax^2$ と直したものと想定して計算をし直します。

$\mathrm{P}_1(t-d,\ a(t-d)^2)$，$\mathrm{P}_2(t+d,\ a(t+d)^2)$

ですから，直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ すなわち ${}_t\ell_d$ の傾きを求めるとき〔i_1〕の分子は，次のように改めます。

$$a(t+d)^2-a(t-d)^2$$
$$=a\{(t+d)^2-(t-d)^2\}=a\times 4td$$

となるので，〔i_1〕および〔i_2〕は次のように改めます。

$$m=\frac{a\times 4td}{2d}=a\times\frac{4td}{2d} \qquad \text{〔}i_1{}^*\text{〕}$$

$$m=a\times 2t=2at \qquad \text{〔}i_2{}^*\text{〕}$$

先生　科学における仮説（予想）は外れることが多いのですが，Iさんの予想はぴたり当たっています。仮説は間違いと気付くことも進歩です。ここでのまとめをしておきます。

図4の直線 $\mathrm{P}y$ を帯 $\mathrm{S}|t,\ d|$ の中心線，直線 P_1y と P_2y を境界線と呼ぶことにします。

放物線 $y=x^2$，$y=ax^2$ の接線の引き方

〔方法Ⅰ〕 放物線上の点Pにおける接線

i）直線 $\mathrm{P}y$ が中心線となる帯をつくる。

ii）その帯の2本の境界線と放物線とが交わる2点にA，Bと名前をつけ，直線ABを引く。

iii) Pを通ってABに平行線を引く。

〔方法II〕 放物線 $y=x^2$ または $y=ax^2$ 上の点Pにおける接線

i) Pの x 座標を知り，それを t とする。

ii) $y=x^2$ の場合は，Pから傾きが $2t$ の直線を引く。$y=ax^2$ の場合は傾き $2at$ の直線を引く。

問2 次の放物線と直線を描け。

(1) $y=x^2$, $_{-1}\ell_0$, $_{-1}\ell_1$, $_{-1}\ell_2$, $_{-1}\ell_3$, ……

(2) $y=\frac{1}{2}x^2$, $_{1}\ell_0$, $_{1}\ell_1$, $_{1}\ell_2$, $_{1}\ell_3$, ……

(3) $y=\frac{1}{3}x^2$, $_{2}\ell_0$, $_{2}\ell_1$, $_{2}\ell_2$, $_{2}\ell_3$, ……

§5. 放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2$ の関係

a は1以外の正の数として論を進めます。

① x 軸上に点 $\mathrm{T}(t,\ 0)$ を任意にとります。直線 Ty が上の2つの放物線と交わる点をそれぞれP，Qとすると，

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$, $\mathrm{Q}(t,\ at^2)$

から，$\mathrm{TP}=t^2$, $\mathrm{TQ}=at^2$

ゆえに $\mathrm{TQ}=a\mathrm{TP}$ 〔j〕

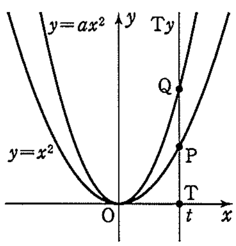


図5

上の〔j〕は x 軸上のTの位置（x 座標 t）に無関係に成り立ちます。Tをどこに動かしても，線分TPの長さを a 倍にしたのがTQだということですから，x 軸を基準にして放物線 $y=x^2$ を y 軸の方向（縦方向）に a 倍に伸縮したのが $y=ax^2$ であると表現しておきます。$a>1$ のときが伸，$0<a<1$ のときが縮です。図5は，$a>1$ のときの例です。

以後，同じような表現が出てきたら注意して下さい。

② y 軸上に，$s>0$ を満たす任意の点 $\mathrm{S}(0,\ s)$ をとります。直線 Sx と2つの放物線との交点のうち x 座標が正である方をそれぞれP，Rとします。

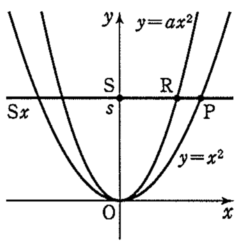


図6

Pの x 座標は

$s=x^2$ $(x>0)$ を解いて

$x=\sqrt{s}$

Rの x 座標は

$s=ax^2$ $(x>0)$ を解いて $x=\sqrt{\frac{s}{a}}$

上のことから $\mathrm{SP}=\sqrt{s}$, $\mathrm{SR}=\sqrt{\frac{s}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{s}$

ゆえに $\mathrm{SR}=\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{SP}$ 〔k〕

どちらの放物線も y 軸に関して対称であることと〔k〕により，放物線 $y=x^2$ を y 軸を基準にして $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍に横方向に伸縮したのが $y=ax^2$ であると表現できます。図6は $a>1$ のときの例です。

③ 放物線 $y=x^2$ の上に頂点（原点）Oと異なる点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとります。次いで，直線OPを引き $y=ax^2$ の方と交わる点をWとします。（WはOと異なる点にとっています。）

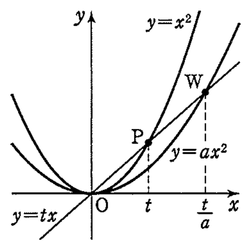


図7

Wの x 座標を求めます。

直線OPは傾きが t だから方程式は

$y=ax^2$, $y=tx$ $(t\neq 0)$ より

$ax^2=tx$

$a\neq 0$, $x\neq 0$ に注意して解くと $x=\frac{t}{a}$

Wの x 座標が求まりました。

比例関係から $\mathrm{OP}:\mathrm{OW}=t:\frac{t}{a}=1:\frac{1}{a}$

ゆえに $\mathrm{OW}=\frac{1}{a}\mathrm{OP}$ 〔l〕

〔l〕により，次のことがいえます。

原点を基準（中心）にして，放物線 $y=x^2$ を $\frac{1}{a}$ 倍に拡大（縮小，伸縮）すると放物線 $y=ax^2$ が得られます。図7は $0<a<1$ のときの例です。

言い方を替えますと，

放物線 $y=x^2$, $y=ax^2$ は原点を中心にして相似である。相似比は $1:\frac{1}{a}$ 〔m〕

（以下 part 2 → 数研通信 61 号）

（愛知県立五条高等学校）