# 意外な展開

和田(わだ)　佳行(よしゆき)

## §1. 数学オリンピックの問題

2005年，第15回日本数学オリンピック本選の中に次のような面白い問題があったので考察してみた。

> 正の実数 $a$，$b$，$c$ が $a+b+c=1$ を満たしているとき，
> $$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leqq 1$$
> を示せ。

$1+b-c=x^3$, $1+c-a=y^3$, $1+a-b=z^3$ とおいて根号をはずし，この不等式を $x$，$y$，$z$ で表そうとしたが，$a$，$b$，$c$ を $x$，$y$，$z$ で表せないので断念。

$a+b+c=1$ に着目して　$x^3=1+b-c=a+2b$

同様に $y^3=b+2c$，$z^3=c+2a$ から

$$a=\frac{x^3-2y^3+4z^3}{9},\quad b=\frac{4x^3+y^3-2z^3}{9},$$
$$c=\frac{-2x^3+4y^3+z^3}{9}$$

となり，この不等式は

$$\frac{x^3-2y^3+4z^3}{9}\times x+\frac{4x^3+y^3-2z^3}{9}\times y+\frac{-2x^3+4y^3+z^3}{9}\times z\leqq 1$$

ただし，$x^3+y^3+z^3=1$ かつ $x>0$，$y>0$，$z>0$ となり，ますます複雑化し，断念。

3乗根がついているので3つの0以上の数に対する相加平均と相乗平均との関係を利用することにした。

すなわち，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ のとき，$x+y+z\geqq 3\sqrt[3]{xyz}$ である。

$$1+b-c=a+b+c+b-c=a+2b$$

同様に $1+c-a=b+2c$，$1+a-b=c+2a$

これを用いると与式は

$$a\sqrt[3]{a+2b}+b\sqrt[3]{b+2c}+c\sqrt[3]{c+2a}\leqq 1$$

を示せばよいことになる。

少し工夫して，$a+2b>0$，$b+2c>0$，$c+2a>0$ から

$$1+1+a+2b\geqq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot(a+2b)}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{a+2b}\leqq\frac{2+a+2b}{3}$$
$$1+1+b+2c\geqq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot(b+2c)}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{b+2c}\leqq\frac{2+b+2c}{3}$$
$$1+1+c+2a\geqq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot(c+2b)}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{c+2a}\leqq\frac{2+c+2a}{3}$$

これより

$$\begin{aligned}
&a\sqrt[3]{a+2b}+b\sqrt[3]{b+2c}+c\sqrt[3]{c+2a}\\
&\leqq a\left(\frac{2+a+2b}{3}\right)+b\left(\frac{2+b+2c}{3}\right)+c\left(\frac{2+c+2a}{3}\right)\\
&\qquad\qquad (\because\ a>0,\ b>0,\ c>0)\\
&=\frac{2a+a^2+2ab+2b+b^2+2bc+2c+c^2+2ca}{3}\\
&=\frac{2(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{3}\\
&=\frac{2(a+b+c)+(a+b+c)^2}{3}=\frac{2+1^2}{3}=1
\end{aligned}$$

(q. e. d)

かなり技巧的な解法ではあるが，何とか証明できたという感じである。

もっと，普遍的な解法はないのかと思っていたところ，Jensen の不等式に辿り着いた。紹介しようと思う。

## §2. Jensen の不等式

> 関数 $f(x)$ において $f^{(2)}(x)\leqq 0$ とする。
> $$a_1\geqq 0,\ a_2\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ a_n\geqq 0$$
> かつ $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=1$ のとき
> 任意の $X_1$，$X_2$，……，$X_n$ に対して
> $$f(a_1X_1+a_2X_2+\cdots\cdots+a_nX_n)$$
> $$\geqq a_1f(X_1)+a_2f(X_2)+\cdots\cdots+a_nf(X_n)$$
> が成り立つ。

これを使うとオリンピックの問題はこのように解

くことになる。

$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ から，$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$,

$f^{(2)}(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ となる。

$x>0$ においては $f^{(2)}(x)<0$ となるので，Jensenの不等式により，

$$
\begin{aligned}
&af(1+b-c)+bf(1+c-a)+cf(1+a-b)\\
&\leqq f(a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b))\\
&\qquad\qquad (\because\ a>0,\ b>0,\ c>0)\\
&=f(a+ab-ac+b+bc-ab+c+ca-bc)\\
&=f(a+b+c)=f(1)=1
\end{aligned}
$$

よって，与式は成り立つ。

## §3. Jensen の不等式の証明

数学に携わっている人間としてはこの Jensen の不等式を証明したいという好奇心が抑えられなくなったので挑戦してみることにする。自分自身にとっても意外な展開である。

数学的帰納法を適用する。

① $n=1$ のとき，

$a_1=1$ から $f(1\cdot x_1)=f(x_1)$ （左辺）

$a_1=1$ から $1\cdot f(x_1)=f(x_1)$ （右辺）

よって（左辺）=（右辺）

② $n=k$ のとき，

$a_1\geqq 0,\ a_2\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ a_k\geqq 0$ かつ

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k=1$

任意の $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_k$ に対して，$f^{(2)}(x)\leqq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
&f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_kx_k)\\
&\geqq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots\cdots+a_kf(x_k)
\end{aligned}
$$

と仮定する。

$n=k+1$ で，

$a_1\geqq 0,\ a_2\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ a_{k+1}\geqq 0$ かつ

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}=1$

また，$x_1\leqq x_2\leqq\cdots\cdots\leqq x_{k+1}$ としても一般性は失わない。$f^{(2)}(x)\leqq 0$ とし，$x_{k+1}=x$ とする。

$$
\begin{aligned}
y_{(x)}=&f(a_1x_1+\cdots\cdots+a_{k+1}x)\\
&-\{a_1f(x_1)+\cdots\cdots+a_{k+1}f(x)\}
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
y'(x)=&a_{k+1}f'(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_{k+1}x)\\
&-a_{k+1}f'(x)\\
=&a_{k+1}\{f'(a_{k+1}x+a_1x_1+\cdots\cdots+a_kx_k)-f'(x)\}
\end{aligned}
$$

ここで，$a_{k+1}x+a_1x_1+\cdots\cdots+a_kx_k-x$

$$
\begin{aligned}
&=a_{k+1}x+a_1x_1+\cdots\cdots+a_k\\
&\qquad -(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1})x\\
&=a_1(x_1-x)+a_2(x_2-x)\\
&\qquad +\cdots\cdots+a_k(x_k-x)\leqq 0
\end{aligned}
$$

$f^{(2)}(x)\leqq 0$ かつ $a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_{k+1}x\leqq x$ から

$f'(a_{k+1}x+a_1x_1+\cdots\cdots+a_kx_k)\geqq f'(x)$, $a_{k+1}\geqq 0$

により $y'(x)\geqq 0$

よって，$y_{(x)}$ は単調増加する。

$x=x_1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
y(x_1)=&f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_{k+1}x_1)\\
&-\{a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots\cdots+a_{k+1}f(x_1)\}\\
=&f\{(a_1+a_{k+1})x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_kx_k\}\\
&-\{(a_1+a_{k+1})f(x_1)+a_2a(x_2)\\
&\qquad+\cdots\cdots+a_kf(x_k)\}\\
=&f\left(\frac{a_1+a_{k+1}}{a_1+\cdots\cdots+a_{k+1}}x_1+\frac{a_2}{a_1+\cdots\cdots+a_{k+1}}x_2\right.\\
&\left.+\cdots\cdots+\frac{a_k}{a_1+\cdots\cdots+a_{k+1}}x_k\right)\\
&-\left\{\frac{a_1+a_{k+1}}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}f(x_1)\right.\\
&+\frac{a_2}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}f(x_2)\\
&\left.+\cdots\cdots+\frac{a_k}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}f(x_k)\right\}\geqq 0
\end{aligned}
$$

この不等式が成立する理由は

$$
\frac{a_1+a_{k+1}}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}\geqq 0,
$$

$$
\cdots\cdots,\ \frac{a_k}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}\geqq 0
$$

でなおかつ

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_1+a_{k+1}}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}+\frac{a_2}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}\\
&\qquad+\cdots\cdots+\frac{a_k}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1}}=1
\end{aligned}
$$

なので，②の仮定より示すことができる。

よって，$y(x_1)\geqq 0$ すなわち $x\geqq x_1$ において，

$y'(x)\geqq 0$ かつ $y(x_1)\geqq 0$ より　$y(x)\geqq 0$

すなわち，$n=k+1$ のときの式

$$
\begin{aligned}
&f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_{k+1}x_{k+1})\\
&\geqq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots\cdots+a_{k+1}f(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

①と②からすべての自然数 $n$ に対して成り立つ。

## §4. Jensenの不等式と（相加平均）≧(相乗平均）の関係

なかなか面白い収穫だった。しかしまた，このJensenの不等式を眺めていると，一般の$n$における相加平均と相乗平均の関係を表す不等式

> $x_1 \geqq 0$，$x_2 \geqq 0$，……，$x_n \geqq 0$ のとき，
> $\dfrac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$ が成り立つ。
> ただし，等号が成り立つのは $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ のときに限る。

にそっくりと思えてきた。

実際，Jensenの不等式を利用すると，この不等式は簡単に証明できる。

$x>0$ として，$f(x)=\log x$ とし，$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$ とすると

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f^{(2)}(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ からJensenの不等式が使えるので，代入すると一般の$n$における，相加平均と相乗平均の関係を表す不等式を得られる。

## §5. おわりに

この問題は私が福岡県の教員採用試験を受けたときの最後の問題で，解答欄がとても狭かったことが印象に残っている。

結局，数学オリンピックの最初の解に戻ってしまった。ここまではまるとは意外である。数学の面白さを改めて思い知らされたと痛感して，この拙い話を終わる。

《参考文献》

〔1〕 大学への数学　2005年4月号　東京出版

（福岡県立春日高等学校）