2次関数の平方完成の一方法

たかはし　としお
高橋　敏雄

§1. はじめに

2次関数において，生徒がまずその入口でつまずくのが平方完成である。おそらく多くの教師泣かせがこの平方完成であろう。なかなか生徒に定着しないのである。だから平方完成を如何に簡単にできないかの多くの試みがなされているのである。

例　$x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ を使う。

$y=2x^2+3x+4$ の平方完成は，

$$\frac{y}{2}=x^2+\frac{3}{2}x+2=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+2$$

$$=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+2=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}$$

$$y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+2\times\frac{23}{16}=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

例　$y=2x^2+3x+4=2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+4$

$$=2\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x\right)$$

$$=2\left\{x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+4$$

$$=2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+4$$

$$=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-2\times\frac{9}{16}+4=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

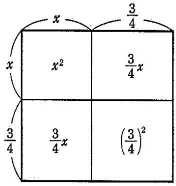
例　田の字を使った方法

$$\frac{y}{2}=x^2+\frac{3}{2}x+2$$

$$=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+2$$

$$=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+2$$

$$=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}$$



これは $x^2+\frac{3}{2}x$ を変形するときに用いる。

$$\therefore\quad y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

いずれにしても，定着度が低い。そこで考えたのが，以下の方法である。

§2. 組み立て平方完成

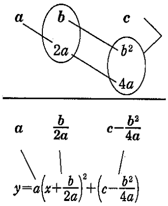
以上に見てきたように如何に平方完成が困難かということがわかったと思う。

そこで考え出したのが，組み立て平方完成（仮名称）という方法である。

$y=ax^2+bx+c$ を平方完成させると，

$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ となる。

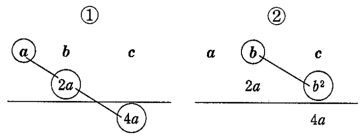
問題はこの公式を如何に覚えるかである。そこで考案したのが下記の表である。

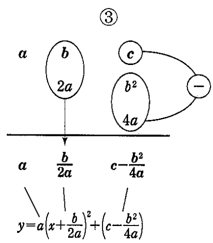


$$c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

次のような順序で組み立てていく。





例 1　$y=x^2+2x+3$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array} \qquad 3-\frac{4}{4}=3-1=2$$

$$\therefore\ y=(x+1)^2+2$$

例 2　$y=x^2+3x$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ & 2 & 9 \\ & & 4 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{array} \qquad 0-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

例 3　$y=-2x^2+5x-2$

$$\begin{array}{ccc} -2 & 5 & -2 \\ & -4 & 25 \\ & & -8 \\ \hline -2 & -\frac{5}{4} & \frac{9}{8} \end{array} \qquad -2-\frac{25}{-8}=-2+\frac{25}{8}=\frac{9}{8}$$

$$\therefore\ y=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

例 4　$y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -3 & -\frac{7}{2} \\ & 1 & 9 \\ & & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & -3 & -8 \end{array} \qquad -\frac{7}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{16}{2}=-8$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}(x-3)^2-8$$

例 5　$y=\frac{5}{3}x^2+\frac{11}{7}x+2$

$$\begin{array}{ccc} 5 & 3\times 11 & 2 \\ 3 & 10\times 7 & 3\times 11^2 \\ & & 20\times 7^2 \\ \hline \frac{5}{3} & \frac{33}{70} & \frac{1597}{980} \end{array}$$

$$2-\frac{3\times 11^2}{20\times 7^2}$$
$$=2-\frac{363}{980}=\frac{1597}{980}$$
$$\therefore\ y=\frac{5}{3}x^2+\frac{33}{70}x+\frac{1597}{980}$$

演習　次の 2 次式を平方完成せよ。

(1)　x^2+8x+1　　(2)　x^2-4x+5

(2)　$2x^2-12x-3$　　(4)　$3x^2+6x+5$

(5)　$-2x^2+12x-9$　　(6)　$2x^2-4x+3$

(7)　$2x^2+12x+10$　　(8)　$-\frac{1}{2}x^2+x+2$

§3. 組み立て平方完成から因数分解

a, b, c は整数とする。このとき，下記の右の式を因数分解という。

$$x^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ただし，α, β は有理数。

このとき，α, β は $ax^2+bx+c=0$ の有理数解である。2 次方程式の解の公式を導く途中の式を書いてみる。

$$ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left\{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\right\}$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left\{-\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\right\}\right]$$

よって，因数分解が可能なのは $-\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$ が完全平方となるときである。

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ & 2a & b^2 & c-\frac{b^2}{4a} \\ & & 4a & \\ \hline a & \frac{b}{2a} & c-\frac{b^2}{4a} & \frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \end{array}$$

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\right\}$$

例 1　$x^2+13x+30$ の因数分解

$$\begin{array}{ccc} 1 & 13 & 30 \\ & 2 & 169 \\ & & 4 \\ \hline 1 & \frac{13}{2} & -\left(\frac{7}{2}\right)^2 \end{array}$$

$$30-\frac{169}{4}$$
$$=\frac{120-169}{4}$$
$$=-\frac{49}{4}=-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

よって，因数分解可能。

$$x^2+13x+30$$
$$=\left(x+\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$=\left(x+\frac{13}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{13}{2}-\frac{7}{2}\right)$$
$$=(x+10)(x+3)$$

例 2　$x^2-29x-30$ の因数分解

$$\begin{array}{ccc} 1 & -29 & -30 \\ & 2 & 841 \\ & & 4 \\ \hline 1 & -\frac{29}{2} & -\left(\frac{31}{2}\right)^2 \end{array}$$

$$-30-\frac{841}{4}$$
$$=-\frac{961}{4}=-\left(\frac{31}{2}\right)^2$$

よって，因数分解可能。

$x^2-29x-30$

$=\left(x-\frac{29}{2}+\frac{31}{2}\right)\left(x-\frac{29}{2}-\frac{31}{2}\right)$

$=(x+1)(x-30)$

例 3　$3x^2-17x+10$ の因数分解

$$\begin{array}{ccc} 3 & -17 & 10 \\ & 6 & \\ & & 289 \\ & & 12 \\ \hline 3 & -\frac{17}{6} & -\frac{169}{12} \end{array} \qquad \begin{aligned} &10-\frac{289}{12} \\ &=-\frac{169}{12} \\ &\frac{1}{3}\times\left(-\frac{169}{12}\right)=-\left(\frac{13}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

よって，因数分解可能。

$3x^2-17x+10$

$=3\left(x-\frac{17}{6}+\frac{13}{6}\right)\left(x-\frac{17}{6}-\frac{13}{6}\right)$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-5)=(3x-2)(x-5)$

演習　$3x^2+7x-10$ を因数分解せよ。

例題 1　$x^2+(2y-1)x+y(y-1)$ を因数分解せよ。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2y-1 & y^2-y \\ & 2 & (2y-1)^2 \\ & & 4 \\ \hline 1 & \frac{2y-1}{2} & -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{array} \qquad \begin{aligned} &y^2-y-\frac{(2y-1)^2}{4} \\ &=\frac{4y^2-4y-(4y^2-4y+1)}{4} \\ &=-\frac{1}{4}=-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

よって，因数分解可能。

$x^2+(2y-1)x+y(y-1)$

$=\left(x+\frac{2y-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2y-1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=(x+y)(x+y-1)$

例題 2　次の式を因数分解せよ。

$2x^2-5xy+2y^2+x-5y-3$

解　$2x^2-5xy+2y^2+x-5y-3$

$=2x^2+(-5y+1)x+2y^2-5y-3$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -5y+1 & 2y^2-5y-3 \\ & 4 & (-5y+1)^2 \\ & & 8 \\ \hline 2 & \frac{-5y+1}{4} & -\frac{(3y+5)^2}{8} \end{array}$$

$2y^2-5y-3-\frac{(-5y+1)^2}{8}$

$=\frac{16y^2-40y-24-(25y^2-10y+1)}{8}$

$=\frac{-9y^2-30y-25}{8}$

$=-\frac{(3y+5)^2}{8}$,　$-\frac{(3y+5)^2}{16}=-\left(\frac{3y+5}{4}\right)^2$

よって，因数分解可能。

$2x^2-5xy+2y^2+x-5y-3$

$=2x^2+(-5y+1)x+2y^2-5y-3$

$=2\left(x+\frac{-5y+1}{4}+\frac{3y+5}{4}\right)$

$\times\left(x+\frac{-5y+1}{4}-\frac{3y+5}{4}\right)$

$=2\left(x+\frac{-2y+6}{4}\right)\left(x+\frac{-8y-4}{4}\right)$

$=2\left(x+\frac{-y+3}{2}\right)(x-2y-1)$

$=(2x-y+3)(x-2y-1)$

練習　$2a^2+3ab+b^2+8a+5b+6$

§4. 判別式

ax^2+bx+c の判別式を D とおく。

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ & 2a & b^2 \\ & & 4a \\ \hline a & \frac{b}{2a} & c-\frac{b^2}{4a} \end{array} \qquad \frac{D}{4}=-a\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\otimes=\begin{cases} \oplus \cdots\cdots \text{異なる2つの虚数解} \\ ⓪ \cdots\cdots \text{2重複解} \\ \ominus \cdots\cdots \text{異なる2つの実数解} \end{cases}$$

例　次の 2 次方程式の解を判別せよ。

(1)　$2x^2-5x+4=0$　　(2)　$4x^2-6x+\frac{9}{4}=0$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -5 & 4 \\ & 4 & 25 \\ & & 8 \\ \hline 2 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 4 & -6 & \frac{9}{4} \\ & 8 & 36 \\ & & 16 \\ \hline 4 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}$$

(1)　$2\times\frac{7}{8}=\frac{7}{4}>0$

∴異なる 2 つの虚数解

(2)　$4\times 0=0$

∴ 2 重複解

(3) $x^2-x-\dfrac{9}{2}=0$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} & \mathbf{-1} & -\frac{9}{2} \\
 & 2 & 1 \\
 & & 4 \\
\hline
\mathbf{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{4}
\end{array}
$$

$$1\times\left(-\frac{19}{4}\right)=-\frac{19}{4}<0$$

∴異なる2つの実数解

§5. おわりに

2次関数の平方完成への変形は，1年生の初め頃に学ぶのであるが，この理解に相当の時間を要する。かつては中学の3年生で学んだものが高校に上がってきても，定着が悪い。数学の研究会でもたびたびこのテーマが論じられるが，感想は大方お互いの健闘を誓うような雰囲気で終了しているように思える。

今回の方法はやはり完全平方の変形不備対策として考案した。特に時間をかけて考案したものではなく，ぼんやりしている中で考えたものである。数学の不得意な生徒に試みさせてみたら「慣れたら解けるようになりました」であった。剰余の定理・因数定理にでてくる『組み立て除法』も慣れたら簡単に解ける方法である。今回の『組み立て平方完成』も慣れたら簡単に解ける方法であって欲しい。

（長崎県立大村工業高等学校）