―中学生の高校体験授業―

自然数の連続和

坂本　茂（さかもと　しげる）

§1. 中学生の体験授業

夏季休業中に中学生の1日高校体験入学があった。そのとき数学の体験授業をすることになっていて内容は「数について」としたが，実際には何をやればよいか決めていなかった。以前，私がイギリス中部 York から 20 km ほど離れた，日本人などには全く会うことのなかった小さな町の高校 comprehensive school に滞在していたとき，下級学校の希望生徒を何人か高校に集めて授業をしていたことを思い出した。そのとき見学させて頂いた内容が「連続和」consecutive sums というものであった。担当した先生は生徒にいろいろ体験させ，考えさせていたのが印象に残っていた。今回，私もこの内容で授業をやってみることにした。

§2. 連続和の授業

1日体験入学には120名ほど中学生の希望者があり，私は36名のクラスの中学生に対して授業を行った。授業で最初に，ある数を連続した2つ以上の数の和として表してみよう，ということで例えば5とか6は $5=2+3$，$6=1+2+3$ のように表せることを示した。次に3以上の他の数についても，連続した数の和で表せるかどうか調べさせた。実際，用紙を渡し3から35までの数について探させた。これには時間を与えたが中学生は興味深く連続和を見つけ出していた。しばらくして，どんな奇数も2つの数の連続和で表せることに気づいた生徒がいた。奇数を2で割ると余りが1だからだという理由を言った。奇数＝商＋(商＋1) ということである。多くの生徒が4，8はどうしても連続和がないと言ってきた。そこで，私は質問した。

(質問1) すべての数に連続和がありますか。もしなければ，どのような数ですか。

この回答として4，8，16，32，64，…… のような数であることが分かってきた。

2項の連続和 $3=1+2$ の両辺に2を加え $5=2+3$，両辺にまた2を加え $7=3+4$，これを続けて奇数の連続和ができることに気づき，このやり方で $6=1+2+3$ の両辺に3を加えることで $9=2+3+4$ を得た生徒がいた。そこで私は

$3=1+2$，$6=1+2+3$，$10=1+2+3+4$，
$15=1+2+3+4+5$，……

のそれぞれ2，3，4，5，…… 項の連続和の両辺に項数を足してゆけば全ての連続和が得られることを悟らせてから，次の質問をした。

(質問2) 複数個の連続和をもつ数はありますか。

中学生は15，21に3つの連続和があると答えた。

$15=7+8=4+5+6=1+2+3+4+5$，
$21=10+11=6+7+8=1+2+3+4+5+6$

(質問3) 15に3の倍数を加えた数には連続和が必ず3つはある理由を考えてみなさい。

私は3，6，10，15，…… の数を「三角数」と呼び俵を三角形に積み上げた図で示した。そして中学生の考えを基に n 番目の三角数に n を加えていった数表 $(n\geqq 2)$ を作らせてみた。

	(k)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
2つの連続和	$3+2k$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	…
3つの連続和	$6+3k$	6	9	12	15	18	21	24	27	…	
4つの連続和	$10+4k$	10	14	18	22	26	30	34	…		
5つの連続和	$15+5k$	15	20	25	30	35	40	…			
6つの連続和	$21+6k$	21	27	33	39	45	…				
7つの連続和	$28+7k$	28	35	42	49	…					

この表に現れる数は連続和で表される数である。15は3箇所にあるので3通りの連続和がある。4，8，16，…は現れてこないので連続和で表せないこ

とが示される。

2つの俵の図を上下に並べて四辺形を作り

$$1+2+3+\cdots\cdots+10=\frac{10\times 11}{2}=55$$

を示した。また $10+9+\cdots\cdots+2+1$ との和から求めるやり方も示し，n 番目の三角数の式

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

を示唆し，右辺が整数であることの理由を聞いた。そして n 項の連続和は $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ のそれぞれに対し，次の形に書けることが上の表で導けることを言った。

$$(1+k)+(2+k)+(3+k)+\cdots\cdots+(n+k)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+nk$$

中学生達は連続和を探しながら自分なりの発見もあったようだ。最後に

（質問４） 与えられた数の連続和を如何に作ればよいですか。

を出しておいた。中学生が数学を好きになるようにということで話したが，この問題も高校生が満足できるように解説しておく必要があろう。

§3. 連続和で表されない数

ある自然数をいくつかの連続した自然数の和として表すことを考えよう。例えば $26=5+6+7+8$ というようにである。このような和を連続和と呼ぶことにする。自然数 x が奇数ならば $11=5+6$ のように２つの連続した自然数の和で表されることは明らかである。奇数は $x=2k+1$ と書けるから，連続和 $x=k+(k+1)$ になる。

一般に自然数 x が初項 a，項数 n の連続和で表されたとしよう。すなわち

$$x=a+(a+1)+(a+2)+\cdots\cdots+(a+n-1)$$

である。これは

$$x=\sum_{k=1}^{n-1}(a+k)=na+1+2+\cdots\cdots+(n-1)$$
$$=na+\frac{n(n-1)}{2}$$

したがって，ある自然数 x に対して $2x=2na+n(n-1)$ となる自然数 a，n が見つかればよいわけである。例えば，$x=10$ のとき $n=4$，$a=1$ を見つけて $10=1+2+3+4$ を得る。

x が４や８などのときは連続和が見つからない。そこで x が２の累乗のときを調べよう。

【命題１】 $x=2^p$ のときは x が連続和で表されない。$(p\geqq 0)$

《証明》 $x=2^p$ が連続和で表されたとすると

$$2x=2^{p+1}=n(2a+n-1)$$

であり $2a+n-1>n\geqq 2$ また $p+1\geqq 1$ より $n=2^i$，$2a+n-1=2^j$ で表され $j>i\geqq 1$ である。ここで $2a-1$ は奇数であるが，$2a-1=2^j-2^i=2^i(2^{j-i}-1)$ となるから偶数となり矛盾する。ゆえに x が２の累乗のときは連続和で表せない。[証終]

§4. 連続和の作り方

では，一般に自然数 x の連続和をどのようにして見つけられるだろうか。連続和は例えば $15=7+8=4+5+6=1+2+3+4+5$ のように１通りとは限らないが，何通りあるのだろう。

まず，自然数 x の連続和を整数の連続和として考え，a は整数，項数 $n=1$ も含め扱う。

【命題２】 自然数 x がある奇数との積 $x=(2j-1)k$ で表されたとき $(j,\ k\geqq 1)$

① x は初項 $a=k-j+1$，項数 $n=2j-1$ の整数の連続和で表せる。

② x は初項 $a=j-k$，項数 $n=2k$ の整数の連続和で表せる。

《証明》 自然数 x は適当な $j,\ k\geqq 1$ により $x=(2j-1)k$ で表される。自然数 x が初項 a と項数 $n\geqq 1$ の連続和で表されれば

$$x=n\left\{a+\frac{n-1}{2}\right\}\ \text{である。}$$

① もし n が奇数ならば $n=2j-1,\ (j\geqq 1)$ とおき，$x=n(a+j-1)$ だから $k=a+j-1$ として $x=(2j-1)k$ と書ける。逆にこのとき $n=2j-1$，$a=k-j+1$ として x の連続和が得られる。($n=1$ ならば $x=a$ となる。)

② また n が偶数なら $n=2k,\ (k\geqq 1)$ とおくと，$x=k\{2(a+k)-1\}$ となるから $j=a+k$ により $x=(2j-1)k$ と書ける。逆にこのとき $n=2k$，$a=j-k$ とすれば x は連続和で表せる。

[証終]

上の解では初項が負の整数 $a<0$ のときにも解となっている。このとき負の部分は正の初めの部分を消し去って，残りの正の整数だけの連続和として書ける。

【命題3】 命題2の①，②は負の項を消去したとき，自然数の同じ連続和となる。

《証明》 ①で $a=k-j+1<0$ のとき負の部分を消去すると x は

$n=2j-1-\{-2(k-j+1)+1\}=2k$,

$a=-(k-j+1)+1=j-k$

の連続和となるから，②と同じものである。また，②で $a=j-k<0$ のとき負の部分を消去して x は

$n=2k-\{-2(j-k)+1\}=2j-1$,

$a=-(j-k)+1=k-j+1$

の連続和になるから，①と同じものである。なお①，②の2つの連続和は，初項の正負が互いに異なっている。[証終]

§5. 連続和の個数

さらに，次のことがいえる。

【命題4】 自然数 x には1以外の奇数の約数の個数だけ連続和がある。

《証明》 先のことから x が1つの奇数との積で表されたとき，正の連続和はただ1つだけ求められた。この連続和は他からは得られないことを示そう。いま，自然数 x が2通りの奇数との積

$x=(2j-1)k=(2i-1)m$, $j\neq i$, $k\neq m$

として表されたとしよう。$x=(2j-1)k$ から得られる連続和の項数は $n=2j-1$ または $n=2k$ である。同様に $x=(2i-1)m$ から得られる連続和の項数は $n=2i-1$ または $n=2m$ である。連続和が同じであるとすれば，同じ項数で $j\neq i$, $k\neq m$ より $2k=2i-1$ または $2m=2j-1$ でなければならないが，これは矛盾である。したがって x の1つの奇数の約数に対して1つの x の連続和が対応する。ゆえに，自然数 x の奇数の約数個だけの連続和を x はもつ。[証終]

ただし，1を x の約数とみると，x 自身も連続和とみなければならない。x が2の累乗 $x=2^p$ のときには奇数の約数が1以外ないので連続和に表せないことが分かる。x が奇数のとき x を x の約数として $2j-1=x$, $k=1$ より $n=2$, $a=\dfrac{x-1}{2}$ であることが分かり2つの連続した数の和で表される。したがって x が素数のときには2つの連続自然数の和にしか表せない。15には奇数の約数が3，5，15の3つあるから3通りの連続和がある。45には奇数の約数が1以外に4つあり表にまとめると

$2j-1$	1	3	5	9	45
j	1	2	3	5	23
k	45	15	9	5	1
a	45	14	7	1	22
n	1	3	5	9	2

である。$k\geqq j$ なら①から，$k<j$ なら②から a, n を求めればよく

$$45=22+23=14+15+16=7+8+9+10+11$$
$$=1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

となる。

次に例として連続和 $(n^2+1)+(n^2+2)+(n^2+3)+\cdots\cdots+(n+1)^2$ は

$$\sum_{k=1}^{2n+1}(n^2+k)=n^2(2n+1)+(2n+1)(n+1)$$
$$=n^3+(n+1)^3$$

であるから，$5+6+7+8+9=2^3+3^3$ のように平方数の次の数から次の平方数までの連続和が2つの連続立方数の和として表される。

§6. 階段和

連続和は言わば階段和とも呼べるものである。では2段登りの階段和，例えば

$6=2+4$, $9=1+3+5$, $32=5+7+9+11$

などはどうであろう。すなわち，奇数の連続和または偶数の連続和として表すことである。偶数 $x=2k$ は $x=(k-1)+(k+1)$ と書け，2段登りの2項の階段和で表される。

一般に自然数 x が初項 a，項数 n の2段登りの階段和

$$x=a+(a+2)+(a+4)+\cdots\cdots+\{a+2(n-1)\}$$

であったとすれば $x=na+n(n-1)=n(n+a-1)$ となる。ここで a, $n\geqq1$ であるから $n\leqq n+a-1$ であり，もし自然数 x が2つの自然数 j, $k\,(j\leqq k)$ の積 $x=jk$ に書けたなら x は $n=j$, $a=k-j+1$ の2段登りの階段和すなわち，a が奇数なら奇数の

階段和，偶数なら偶数の階段和として表される。

例えば $12=2^2\times3=1\times12=2\times6=3\times4$ だから12は自身も含め $12=5+7=2+4+6$ の3通りの奇数の階段和で表せる。$j=k$ で $x=k^2$ のとき次式を得る。

$$k^2=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)$$

x が奇数のときは偶数の階段和で表すことはできず，また偶数 x を2で割った商が奇数のときは，x を奇数の階段和では表せない。x が素数ならば2段登りの階段和はない。

初項 a，項数 n，階差 d の階段和 x は等差数列の和の式より次式である。

$$x=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

これより，一般に次の d 段登りの階段和の命題が成り立つ。

> **【命題5】** 自然数 x が，ある偶数階差 $d=2l$ $(l\geqq1)$ の自然数階段和で表されるための，必要十分条件は $x=nk$ と書けることである。$(2\leqq n\leqq k)$

《証明》 初項 $a\geqq1$，項数 n，とし階段和は $x=n\{a+(n-1)l\}$ である。$k=a+(n-1)l$ とおけば $x=nk$ と書け $k\geqq n\geqq2$ である。

逆に，$n\leqq k$ より $n<k+1$ であり $1<\dfrac{k}{n-1}$ であるから $1\leqq l<\dfrac{k}{n-1}$ となるような $l\geqq1$ が存在する。$a=k-(n-1)l>0$ とおいて，$x=nk=n\{a+(n-1)l\}$ となる。

したがって，x は偶数階差の階段和で表される。

［証終］

x が素数なら偶数階差 d に対する階段和は存在しない。

> **【命題6】** 自然数 x が，ある奇数階差 $d=2l-1$ $(l\geqq1)$ の自然数階段和で表されるための，必要十分条件は $x=(2j+1)k$ と書けることである。$(j\geqq1,\ k\geqq1)$

《証明》 初項 $a\geqq1$，項数 n，とし階段和

$$x=n\left\{a+(n-1)l-\frac{n-1}{2}\right\}$$

に表されたとする。

① もし n が奇数なら $n=2j+1$ $(j\geqq1)$ とおいて，$x=n(a+jd)$ となるので $k=a+jd$ として $x=(2j+1)k$ と書ける。$a\geqq1$，$jd\geqq1$ であり $k\geqq2$，また $a=k-j(2l-1)$ である。

② また n が偶数なら $n=2k$ $(k\geqq1)$ とおいて，$x=k\{2(a+(n-1)l-k)+1\}$ であるから $j=a-k+(2k-1)l$ として $x=(2j+1)k$ と書ける。ここで $a=k+j-(2k-1)l$ である。

したがって，①，②より $x=(2j+1)k$ で書き表せる。

逆に，$j\geqq1$，$k\geqq1$ のとき $x=(2j+1)k$ と書けるとする。階段和で表されるなら初項 $a\geqq1$ であるから，

①のとき $a=k-j(2l-1)\geqq1$，

②のとき $a=k+j-(2k-1)l\geqq1$ であり

①の場合：$l\leqq\dfrac{k+j-1}{2j}$，

②の場合：$l\leqq\dfrac{k+j-1}{2k-1}$

それぞれの条件を得る。

もし①の場合で $\dfrac{k+j-1}{2j}<1$ となり階段和ができないとき，$j>k-1$ すなわち $j\geqq k$ である。このとき，②においては $\dfrac{k+j-1}{2k-1}\geqq1$ となり $l\geqq1$ が存在し $a\geqq1$ となるので，x は②によって $n=2k$ の階段和となる。

また，もし②の場合で $\dfrac{k+j-1}{2k-1}<1$ となり階段和ができないとき，$j<k$ すなわち $k\geqq j+1$ である。このとき，①においては $\dfrac{k+j-1}{2j}\geqq1$ となり $l\geqq1$ が存在し $a\geqq1$ となるので，x は②によって $n=2j+1$ の階段和となる。［証終］

$x=2^p$ で2の冪乗の場合に階差 d が偶数なら $2^4=1+3+5+7$ のような和はあるが，階差 d が奇数の階段和はない。

以上の問題は，和が自然数 x として与えられた等差数列において，初項 a，公差 d が正の整数であるものを求めることに相当する。

（東京都立上水高等学校）