閉区間で連続な関数はその区間で最大値および最小値をもつことの高校生にもわかる証明

森　茂（もり　しげる）

§1. はじめに

まず，1つの定義と6つの定理を掲げよう。

定義 1

「区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\leqq M$」を満たす実数 M が存在するとき，$f(x)$ は $[a,\ b]$ で上に有界であるという。

「区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq M$」を満たす実数 M が存在するとき，$f(x)$ は $[a,\ b]$ で下に有界であるという。

定理 1（区間縮小法）

$I_n=[a_n,\ b_n]$，$|I_n|=b_n-a_n$ とする。

$I_1\supset I_2\supset I_3\cdots$ かつ $\lim_{n\to\infty}|I_n|=0$

が成り立つとき，

$\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$ なる実数 ξ がただ1つ存在する。

定理 2（中間値の定理）

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で $f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，$f(c)=0$，$a<c<b$ を満たす実数 c が少なくとも1つ存在する。

定理 3

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続ならば $f(x)$ は $[a,\ b]$ で最大値および最小値をもつ。

定理 4（ロルの定理）

$f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能とする。

$f(a)=f(b)=0$ ならば $f'(c)=0$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。

定理 5（平均値の定理）

$f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能とする。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

定理 6

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で単調に増加する。

微分法を勉強すると必ず出てくるのが定理6である。数学IIの教科書では，$f'(x)>0$ の区間でグラフの接線が右上がりであるからと説明している。また，数学IIIでは平均値の定理を用いてこれを証明している。新課程になって平均値の定理の証明が数研出版の数学IIIの教科書から消えてしまったが，旧課程の数研出版の数学IIIの教科書では定理3を出発点にして，ロルの定理を経て，平均値の定理を証明していた。しかし，定理3は旧課程の数研出版の数学IIIの教科書においても，「一般に次のことが成り立つ。」と書かれているだけである。「せっかく平均値の定理を証明しても，その根拠になる定理3を証明しないのでは意味がない。何とか定理3を高校生が知っている知識だけで証明できないだろうか。」そう考えて，高校生にもわかる定理3の証明を考案するに至ったのである。

定理3は実数の連続性と密接にかかわっているので，実数の連続性抜きでは語れないのであるが，定理2（中間値の定理）は高校生もすぐに納得してくれる。「負から正に連続的に動くとき，一瞬0になるでしょう。」と言うと，「そうだ！」と言ってくれる。「越前市から三国町へ行くとき少なくとも1回は九頭竜川を渡らなければならないでしょう。」言うと（話がローカルですみません。），簡単に納得してくれる。それで，これ（中間値の定理）を根拠に定理3の証明を試みる。

§2. 定理3の証明

《Step I》

$f(x)$ が $[a,\ b]$ で連続であるとする。 $R=\{f(x)\,\vert\, a\leqq x\leqq b\}$ とおく。 $y_1\in R$, $y_2\in R$, $y_1<y_3<y_2$ ならば $y_3\in R$

証明　$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ とする。

$g(x)=f(x)-y_3$ とおくと,

$$g(x_1)=f(x_1)-y_3=y_1-y_3<0$$

$$g(x_2)=f(x_2)-y_3=y_2-y_3>0$$

定理2(中間値の定理)によって,

$g(x_3)=0$ なる x_3 が x_1 と x_2 の間に存在する。

$\therefore\ f(x_3)-y_3=0 \qquad y_3=f(x_3) \quad x_3\in R$

ゆえに R は $(-\infty,\ d)$, $(-\infty,\ d]$, $(-\infty,\ \infty)$, $(c,\ d)$, $(c,\ d]$, $(c,\ \infty)$, $[c,\ d)$, $[c,\ d]$, $[c,\ \infty)$ のいずれかである。

《Step II》

$R\neq(-\infty,\ \infty)$ かつ $R\neq(c,\ \infty)$ かつ $R\neq[c,\ \infty)$

証明　今仮に R が $(-\infty,\ \infty)$, $(c,\ \infty)$, $[c,\ \infty)$ のいずれかであるとする。

$$\{f(x)\,|\,x\in[a,\ a+\frac{b-a}{2}]\},$$

$$\{f(x)\,|\,x\in[a+\frac{b-a}{2},\ b]\}$$

の少なくとも一方は上に有界でないから,

もし,どちらも上に有界だったら,

$a\leqq x\leqq a+\dfrac{b-a}{2}$ のとき　$f(x)\leqq M_1$

$a+\dfrac{b-a}{2}\leqq x\leqq b$ のとき　$f(x)\leqq M_2$

となる M_1, M_2 が存在する。

$M=\max\{M_1,\ M_2\}$ とおけば

$a\leqq x\leqq b$ のとき $f(x)\leqq M$。

$[a,\ b]$ で上に有界になるから, R は $(-\infty,\ \infty)$, $(c,\ \infty)$, $[c,\ \infty)$ のいずれにもなりえない。

$\left\{f(x)\,|\,x\in\left[a,\ a+\dfrac{b-a}{2}\right]\right\}$ が上に有界でないとき, $I_1=\left[a,\ a+\dfrac{b-a}{2}\right]$, $x_1=a$ とし,

$\left\{f(x)\,|\,x\in\left[a+\dfrac{b-a}{2},\ b\right]\right\}$ が上に有界でないとき, $I_1=\left[a+\dfrac{b-a}{2},\ b\right]$, $x_1=a+\dfrac{b-a}{2}$ とする。

(どちらも上に有界でないときは,どちらを I_1, x_1 にしてもよい。)

ここで, $I_1=\left[x_1,\ x_1+\dfrac{b-a}{2}\right]$ は上に有界でない。

次に, $\left\{f(x)\,|\,x\in\left[x_1,\ x_1+\dfrac{b-a}{2^2}\right]\right\}$ が上に有界でないとき, $I_2=\left[x_1,\ x_1+\dfrac{b-a}{2^2}\right]$, $x_2=x_1$ とし,

$\left\{f(x)\,|\,x\in\left[x_1+\dfrac{b-a}{2^2},\ x_1+\dfrac{b-a}{2}\right]\right\}$ が上に有界でないとき, $I_2=\left[x_1+\dfrac{b-a}{2^2},\ x_1+\dfrac{b-a}{2}\right]$, $x_2=x_1+\dfrac{b-a}{2^2}$ とする。

(どちらも上に有界でないときは,どちらを I_2, x_2 にしてもよい。)

以下,これを繰り返すと

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|I_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$ より,

$\{x_n\}$ はある値 e に収束し,

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\infty \quad \cdots\cdots①$$

ところが $f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続だから

$$\lim_{x\to e}f(x)=f(e)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(e) \quad \cdots\cdots②$$

①, ②は矛盾している。

よって, R は $(-\infty,\ \infty)$, $(c,\ \infty)$, $[c,\ \infty)$ のいずれでもない。

同様にして, $f(x)$ が下に有界であることが導けるから, $R\neq(-\infty,\ d)$ かつ $R\neq(-\infty,\ d]$

《Step III》

$R\neq(c,\ d)$, $[c,\ d)$, $(c,\ d]$

証明　今仮に $R=(c,\ d)$ または $R=[c,\ d)$ であるとする。

$g(x)=\dfrac{1}{d-f(x)}$ とおくと, $g(x)$ は分母が0にならないから, $[a,\ b]$ で連続である。ゆえに, $g(x)$ に《Step II》と同様の議論を適用すれば, $g(x)$ は $[a,\ b]$ で上に有界であることが導ける。……③

ところが, $g(x)$ の分母はいくらでも0に近くなるから, $g(x)$ は $[a,\ b]$ で上に有界でなくなる。……④

③, ④は矛盾している。

よって, R は $(c,\ d)$, $[c,\ d)$ のいずれでもない。

同様にして，$R=(c,\ d]$ として $h(x)=\dfrac{1}{f(x)-c}$ を考えると矛盾が起こるから，$R\neq(c,\ d]$

《Step IV》

以上より，$R=[c,\ d]$

よって，$f(x)$ は最大値 d および最小値 c をもつ。

§3. 補足

《Step II》の議論は高校生向きに作られているので，若干，厳密性に欠ける。そこで，念のため，厳密な証明を補足させていただく。

【《Step II》の厳密な証明】

$f(x)$ が $[a,\ b]$ で上に有界でないとする。

《StepII》のように I_1，I_2，I_3，… を作ると

$I_1\supset I_2\supset I_3$，… かつ $\lim_{n\to\infty}|I_n|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$ だから，定理1(区間縮小法)によって $e\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$ なる実数 e が存在する。

十分小さい正の数 ε をとる。$f(x)$ は $x=e$ で連続だから，『$e-\delta<x<e+\delta$ ならば $f(e)-\varepsilon<f(x)<f(e)+\varepsilon$』なる正の数 δ が存在する。

$e\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$ より

『$N\leqq n$ ならば $I_n\subset(e-\delta,\ e+\delta)$』なる自然数 N が存在する。$f(x)$ は $(e-\delta,\ e+\delta)$ で上に有界であるのに，I_n で上に有界でないから矛盾する。$\therefore f(x)$ は $[a,\ b]$ で上に有界である。 ■

《参考文献》

〔1〕 改訂版 高等学校 数学III 旧課程文科省検定済教科書 数研出版

〔2〕 数学III 新課程文科省検定済教科書 数研出版

〔3〕 高木貞治著 解析概論 改訂第三版 岩波書店

(福井県立科学技術高等学校)