私の数学教材研究ノートから　第4回

田島　宅二

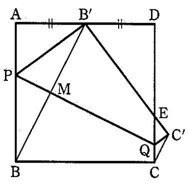
§1. その教材研究の動機

私は，静岡県教育委員会の「教育広報」(1972年5月号)に「数学の問題作成方法の研究」と題して寄稿したことがある。その中で正方形のひとつの頂点をその隣りの辺以外の辺の中点へもっていって折り曲げると正方形の面積の何％が折り曲がるかを知りたいと思って心を弾ませて作問したことを書いた。爾来35年経ってもその思い出が消えやらず次々と問題が迸り出て，寄稿したときは小問で7問であったが今では9問増えて16問となっている。

次に正三角形を同じように折り曲げて研究してみた。折り紙を，快適な音を立てて折り曲げ，何かをつくりあげる喜びは幼いころにその起源があるが，ここでは，意図的な折り曲げから作問(数学をつくっていくこと)していくこととする。それはまた「数学をいかにして解くか」から「数学をいかにして作るか」の作問遍歴でもある。

§2. 正方形の折り曲げから数学をつくる

図1は折り紙の正方形ABCDの頂点Bを，辺ADの中点B′へ運んで，きちんと折り曲げたものである。PQはその折り目である。正方形の一辺を$2a$として作問する。



(図1)

$\boxed{1}$　AP$=x$　としてxを求めよ。

$\boxed{2}$　△PAB′∽△B′DE を証明せよ。

$\boxed{3}$　△B′DE∽△QC′E を証明せよ。

$\boxed{4}$　DE$=y$　としてyを求めよ。

$\boxed{5}$　B′E$=z$　としてzを求めよ。

$\boxed{6}$　EC′$=s$　としてsを求めよ。

$\boxed{7}$　CQ$=$C′Q$=t$　としてtを求めよ。

$\boxed{8}$　△PAB′，△B′DE，△QC′E の相似比及び面積比を求めよ。

$\boxed{9}$　折り曲げた四角形PB′C′Q(四角形PBCQといってもよい)の面積は，正方形ABCDの面積の何％にあたるか。

$\boxed{10}$　PQ=BB′ を証明せよ。(PQ=BB′ は発見的であった。)

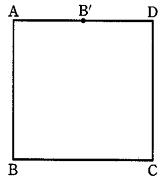
$\boxed{11}$　AP：PB=(台形PBCQの面積)：(台形APQDの面積)を証明せよ。(この比の等しいのも発見的であった。)

$\boxed{12}$　△PBB′の面積を求めよ。

$\boxed{13}$　△QCC′の面積を求めよ。

$\boxed{14}$　図1で4点が同一円周上にあるのはどれか。

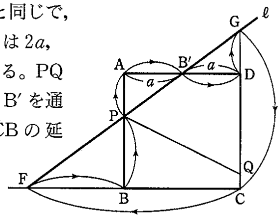
$\boxed{15}$　定規とコンパスを用いて次の図2に折り目PQを作図せよ。コンパスを用いたあとはそのまま残しておくこと。(この作図は生徒は案外気がつきにくい。)



(図2)

$\boxed{16}$　図3は図1と同じで，正方形の一辺は$2a$，BはB′に重なる。PQは折り目。P，B′を通る直線ℓがCBの延長と，CDの延長との交点をそれぞれF，Gとする。このとき

$$\frac{\text{FB}}{\text{BP}}\cdot\frac{\text{PA}}{\text{AB}'}\cdot\frac{\text{B}'\text{D}}{\text{DG}}\cdot\frac{\text{GC}}{\text{CF}}$$ の値を求めよ。



(図3)

§3. その解答例

$\boxed{1}$　AP$=x$ とすると，PB′$=2a-x$，三平方の定理により，$a^2+x^2=(2a-x)^2$　　$\therefore\ x=\dfrac{3}{4}a$

$\boxed{2}$　△PAB′ と △B′DE で

$$\begin{cases} \angle A=\angle D=\angle R & \cdots\cdots① \\ \angle AB'P+\angle APB'=\angle R & \\ \angle AB'P+\angle DB'E=\angle R & \\ \therefore\quad \angle APB'=\angle DB'E & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②から　$\triangle PAB' \backsim \triangle B'DE$（2角相等）

$\boxed{3}$　$\triangle B'DE$ と $\triangle QC'E$ で

$$\begin{cases} \angle D=\angle QC'E=\angle R & \cdots\cdots① \\ \angle DEB'=\angle C'EQ\ (\text{対頂角}) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②から　$\triangle B'DE \backsim \triangle QC'E$（2角相等）

$\boxed{4}$　$\triangle PAB' \backsim \triangle B'DE$ により

$AB' : DE = AP : DB'$

$a : y = \frac{3}{4}a : a \qquad \therefore\quad y=\frac{4}{3}a$

$\boxed{5}$　$z=\sqrt{a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2}=\frac{5}{3}a$

$\boxed{6}$　$s=2a-\frac{5}{3}a=\frac{a}{3}$

$\boxed{7}$　$\triangle QC'E \backsim \triangle B'DE$ から

$t : a=\frac{a}{3} : \frac{4}{3}a \qquad \therefore\quad t=\frac{a}{4}$

$\boxed{8}$　$\triangle PAB' \backsim \triangle B'DE \backsim \triangle QC'E$ から

$PA : B'D : QC'=\frac{3}{4}a : a : \frac{a}{4}=3:4:1$（相似比）

問いとして設けていないが $PA+QC'=B'D$（$=AB'$）も発見的である。面積比は　$9:16:1$

$\boxed{9}$　$\dfrac{\text{台形 PB'C'Q（または台形 PBCQ）の面積}}{\text{正方形 ABCD の面積}}\times 100$

$=\dfrac{\left(\frac{a}{4}+\frac{5}{4}a\right)\times 2a\times\frac{1}{2}}{(2a)^2}\times 100=37.5\ (\%)$

発見的である。

$\boxed{10}$　$\triangle ABB'$ で $\angle A=\angle R$ であるから

$BB'=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}\,a$

Qから AB に垂線を下ろした足をHとすると，

$PQ=\sqrt{PH^2+QH^2}$

$=\sqrt{\left(2a-\frac{3}{4}a-\frac{a}{4}\right)^2+(2a)^2}$

$=\sqrt{5}\,a \qquad \therefore\quad BB'=PQ$

$\boxed{11}$　$AP : PB=\frac{3}{4}a : \left(2a-\frac{3}{4}a\right)=3:5$

台形 $PBCQ=\left\{\frac{a}{4}+\left(2a-\frac{3}{4}a\right)\right\}\times 2a\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}a^2$

台形 $APQD=\left\{\frac{3}{4}a+\left(2a-\frac{a}{4}\right)\right\}\times 2a\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}a^2$

$\therefore$　台形 PBCQ：台形 APQD$=3:5$

$\therefore$　$AP : PB$

$=$(台形 PBCQ の面積)：(台形 APQD の面積)

$\boxed{12}$　$\triangle PBB'$ の面積$=\frac{5}{4}a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}a^2$

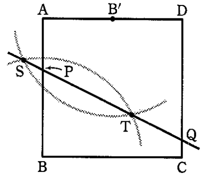
$\boxed{13}$　$\triangle QCC' \backsim \triangle PBB'$（2角相等）

$QC : PB=\frac{a}{4} : \frac{3}{4}a=1:3$　　面積比$=1:9$

$\triangle QCC'$ の面積$=\frac{5}{8}a^2\times\frac{1}{9}=\frac{5}{72}a^2$

$\boxed{14}$　4点 A，B，C，D　4点 B′，D，C′，Q
4点 A，P，M，B′　4点 B，M，Q，C
4点 B′，M，Q，C′　4点 B′，M，Q，D
4点 B，B′，C′，C

$\boxed{15}$　AD の中点 B′ をとる。線分 BB′ の垂直二等分線をひくために B を中心に BB′ の $\frac{1}{2}$ を超える半径で円をえがき，次に B′ を中心に，いまと同じ半径で円をえがきその交点を S，T とする。S，T を通る直線のうち線分 PQ が求める折り目 PQ である。



（図4）

$\boxed{16}$　$PA=\frac{3}{4}a$，$BP=2a-\frac{3}{4}a=\frac{5}{4}a$，

$FB=a\times\frac{5}{4}a\times\frac{4}{3a}=\frac{5}{3}a$，$AB'=a$，$B'D=a$，

$DG=\frac{3}{4}a$，$GC=\frac{11}{4}a$，$CF=\frac{11}{3}a$

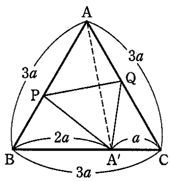
$$\frac{\frac{5}{3}a}{\frac{5}{4}a}\cdot\frac{\frac{3}{4}a}{a}\cdot\frac{a}{\frac{3}{4}a}\cdot\frac{\frac{11}{4}a}{\frac{11}{3}a}=1$$

しかし，四角形 ABCD が正方形だから 1 になると言っているのではない。（数研通信 55 号の $p.21$ を参照してほしい。）

§4. 正三角形の折り曲げから数学をつくる

図5は折り紙の正三角形 ABC の頂点 A を，辺 BC の頂点 C から $\frac{1}{3}$ の点 A′ へ運んできちんと折り曲げたものである。

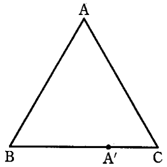
正三角形の辺を $3a$ として作問する。



（図5）

1 正三角形ABCの折り目PQをコンパスを用いて図6に作図せよ。(コンパスを用いたあとはそのまま残しておくこと。)

2 $\triangle BA'P \backsim \triangle CQA'$ を証明せよ。



(図6)

3 $CQ=x$ として x を求めよ。

4 $BP=y$ として y を求めよ。

5 $\triangle APQ$ ($\triangle A'PQ$ としてもよい。)の面積を求めよ。

6 $\triangle BPA'$ の面積を求めよ。

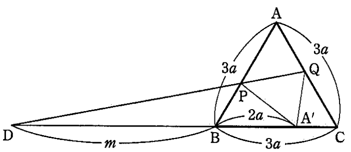
7 $\triangle CQA'$ の面積を求めよ。

8 PQの長さを求めよ。

9 $\triangle APQ$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何%にあたるか。

10 AA' の長さを求めよ。

11 CBの延長とQPの延長との交点をDとする。このとき $BD=m$ として，mを求めよ。



(図7)

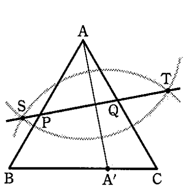
12 AP : PBを求めよ。

13 AQ : QCを求めよ。

14 $\dfrac{CD}{DB}\cdot\dfrac{BP}{PA}\cdot\dfrac{AQ}{QC}$ の値を求めよ。

§5. その解答例

1 AA' の垂直二等分線をひくためにAを中心に AA' の $\dfrac{1}{2}$ を超える半径で円をえがき，次に A' を中心にいまと同じ半径で円をえがき，その交点をS，Tとする。SとTを通る直線のうち，線分PQが求める折り目PQである。



(図8)

2 $\triangle BA'P$ と $\triangle CQA'$ で

$$\left\{\begin{array}{l}\angle B=\angle C=60^\circ \quad \cdots\cdots① \\ \angle PA'Q=60^\circ \text{ であるから} \\ \angle BA'P+\angle CA'Q=120^\circ \quad \cdots\cdots② \\ \angle B=60^\circ \text{ であるから} \\ \angle BA'P+\angle BPA'=120^\circ \quad \cdots\cdots③ \\ ②,\ ③\text{から } \angle BPA'=\angle CA'Q \quad \cdots\cdots④\end{array}\right.$$

①，④から $\triangle BA'P \backsim \triangle CQA'$ (2角相等)

3 4 $\triangle BA'P \backsim \triangle CQA'$ により

$2a : x=y : a=(3a-y):(3a-x)$ となり

$xy=2a^2$ ……① $y(3a-x)=a(3a-y)$ ……②

①，②から $x=\dfrac{8}{5}a$，$y=\dfrac{5}{4}a$

5 $\triangle APQ$ の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot AP\cdot AQ\sin 60^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(3a-\frac{5}{4}a\right)\cdot\left(3a-\frac{8}{5}a\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{80}a^2$$

6 $\triangle BPA'$ の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\dfrac{5}{4}a\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}a^2$

7 $\triangle CQA'$ の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{8}{5}a\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}a^2$

8 $PQ^2=\left(\dfrac{7}{4}a\right)^2+\left(\dfrac{7}{5}a\right)^2-2\cdot\dfrac{7}{4}a\cdot\dfrac{7}{5}a\cdot\cos 60^\circ$

$\therefore\ PQ=\dfrac{7\sqrt{21}}{20}a$

9 $\dfrac{49\sqrt{3}}{80}a^2\div\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2\times 100=27\dfrac{2}{9}$ (%)

10 $PQ\perp AA'$ から $\dfrac{1}{2}\cdot PQ\cdot AA'=2\triangle APQ$ より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7\sqrt{21}}{20}a\cdot AA'=2\cdot\frac{49\sqrt{3}}{80}a^2$$

$\therefore\ AA'=\sqrt{7}\,a$

11 メネラウスの定理により

$$\frac{3a+m}{m}\cdot\frac{\frac{5}{4}a}{\frac{7}{4}a}\cdot\frac{\frac{7}{5}a}{\frac{8}{5}a}=1 \qquad \therefore\ m=5a$$

12 AP : PB=7 : 5

13 AQ : QC=7 : 8

14 $\dfrac{8a}{5a}\cdot\dfrac{\frac{5}{4}a}{\frac{7}{4}a}\cdot\dfrac{\frac{7}{5}a}{\frac{8}{5}a}=1$

しかし，$\triangle ABC$ が正三角形であるから1になるといっているのではないことは勿論である。

(元高校教員)