四面体に関する一性質

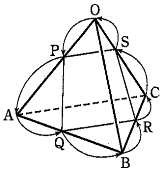
大塚（おおつか）　秀幸（ひでゆき）

§0. はじめに

空間ベクトルの題材として四面体を扱うことがよくある。今回はその中から，教材研究の際に気がついたある四面体の性質を紹介しよう。

§1. 四面体に関する性質

【定理】 四面体OABCを右の図のように断面が四角形になるような平面で切る。ここで，四角形の頂点をP，Q，R，Sとする。

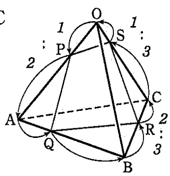


このとき $\dfrac{OP}{PA}\times\dfrac{AQ}{QB}\times\dfrac{BR}{RC}\times\dfrac{CS}{SO}=1$ となる。

証明の前に，具体例を通して今回の定理の利用法を示しておこう。

【問題】

右の図の四面体OABCにおいて，辺OAを1：2に内分する点をP，辺OCを1：3に内分する点をS，辺BCを3：2に内分する点をRとする。また，この四面体をP，S，Rを通る平面で切ったとき，この平面が辺ABと交わる点をQとする。



このとき，AQ：QBを求めよ。

この問題に対する解答は例えばベクトルを用いて議論すればよいが，検算として上記の定理を利用すると以下の通りとなる。

【検算】 $\dfrac{OP}{PA}\times\dfrac{AQ}{QB}\times\dfrac{BR}{RC}\times\dfrac{CS}{SO}$

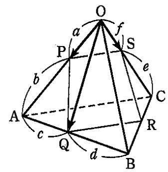
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{AQ}{QB}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{1}=1$

よって　$\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{4}{9}$　　∴　AQ：QB＝4：9

§2. 定理の証明

「ベクトルによる証明」と「初等幾何による証明」の2通りを示そう。前者は非常に面倒な証明であるが形式的に議論ができ，後者はシンプルではあるが幾何特有の発想が必要となる。

【ベクトルによる証明】



OP＝a，PA＝b，AQ＝c，QB＝d，CS＝e，SO＝f とおくと，3点P，Q，Sを通る平面上の点の位置ベクトルは，

$$x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OQ}+z\overrightarrow{OS}\qquad(x+y+z=1)$$

$$=\frac{ax}{a+b}\overrightarrow{OA}+\frac{dy\overrightarrow{OA}+cy\overrightarrow{OB}}{c+d}+\frac{fz}{e+f}\overrightarrow{OC}$$

$$=\left(\frac{ax}{a+b}+\frac{dy}{c+d}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{cy}{c+d}\overrightarrow{OB}+\frac{fz}{e+f}\overrightarrow{OC}\qquad\cdots①$$

ここで，Rは平面PQS上にあり辺BC上にあるので，$\overrightarrow{OR}$ は①式で表すことができ，また，次の条件を満たす。

$$\frac{ax}{a+b}+\frac{dy}{c+d}=0,\ \frac{cy}{c+d}+\frac{fz}{e+f}=1,$$

$$x+y+z=1$$

この条件を満たす x，y，z を，a～f を用いて表すと，(実は，この計算が非常に面倒なのだが…)

$$x=-\frac{de(a+b)}{ace+bdf},\ y=\frac{ae(c+d)}{ace+bdf},$$

$$z=\frac{bd(e+f)}{ace+bdf}$$

これを，①式に代入し整理すると，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{ace\overrightarrow{OB}+bdf\overrightarrow{OC}}{ace+bdf}$$

よって，BR：RC＝bdf：ace

したがって，$\dfrac{OP}{PA}\times\dfrac{AQ}{QB}\times\dfrac{BR}{RC}\times\dfrac{CS}{SO}$

$$=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{bdf}{ace}\times\frac{e}{f}=1 \quad \blacksquare$$

【初等幾何による証明】

(i) 平面PQRS∥OBかつ平面PQRS∥ACのとき

$$\frac{OP}{PA}=\frac{OS}{SC}=\frac{BQ}{QA}=\frac{BR}{RC} \text{ より}$$

$$\frac{OP}{PA}\times\frac{AQ}{QB}\times\frac{BR}{RC}\times\frac{CR}{SO}=1$$

(ii) 平面PQRSと直線OB(または直線AC)が平行でないとき

平面PQRSと直線OBの交点をXとすると，メネラウスの定理より

$$\frac{OP}{PA}\times\frac{AQ}{QB}\times\frac{BX}{XO}=1$$

$$\frac{OS}{SC}\times\frac{CR}{RB}\times\frac{BX}{XO}=1$$

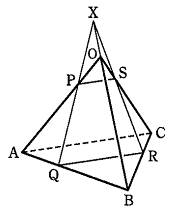
したがって

$$\frac{OP}{PA}\times\frac{AQ}{QB}\times\frac{BR}{RC}\times\frac{CS}{SO}$$

$$=\left(\frac{OP}{PA}\times\frac{AQ}{QB}\times\frac{BX}{XO}\right)$$

$$\times\left(\frac{SC}{OS}\times\frac{RB}{CR}\times\frac{XO}{BX}\right)$$

$$=1$$



$\blacksquare$

§3. おわりに

今回紹介した性質は「チェバの定理」や「メネラウスの定理」と似た雰囲気があるので非常に覚えやすい。また，先に示した様にこの種の問題に対し，検算用として有効に活用できると思う。

(東京都　元文教大学付属高等学校)