2交点と他の1点を通る円・放物線

楠田(くすだ)　貴至(たかし)

§0. はじめに

放物線がx軸から切り取る線分の長さを求める問題は，センター試験の1問目に必ず出ると言ってもいい問題で，いくつかの解法があり，実際の交点の座標(x座標)を出して，引き算することもそのうちの1つである。

これに対して，円が直線から切り取る線分の長さを求める問題も，数学IIでは当たり前の問題であるが，こちらについては，直接交点の座標を出して，2点間の距離を計算する方法はあまり感心しない。円の中心から直線までの距離と円の半径を用いて，三平方の定理から求めることを指導される。

要するに「交点の座標を求める」という方法は良くなく，「交点の座標を求めないで」解くのが上等とされる。このことは，交点の座標が複雑になるものを扱うことによって，補強され刷り込まれる。

ところが，一般の直線から放物線が切り取る線分の長さを求める問題については，交点の座標を求めないと無理とされている。

§1. 放物線と直線

> **問題1**　放物線 $y=x^2-4x+5$ と直線 $y=2x-3$ の交点をA，Bとするとき，ABを求めよ。

(A，Bの座標から求める)

2式からyを消去して，$x^2-4x+5=2x-3$

これを整理して　$x^2-6x+8=0$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$$x=2,\ 4$$

$x=2$ のとき，$y=2x-3$ から　$y=1$

$x=4$ のとき，同様に　$y=5$

よって，交点A，Bの座標は　(2，1)，(4，5)

だから　$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2}$

$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$　答

2点の交点を求めてやるならこのようになる。求めないのであれば，次のようなやり方が考えられる。

(A，Bの座標を利用しない求め方)

2式からyを消去して，$x^2-4x+5=2x-3$

これを整理して　$x^2-6x+8=0$　…①

この2次方程式の2解を，α，β とすると

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=8$ なので

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4\cdot8=4$$

また，第2式を $x=\dfrac{y+3}{2}$ として，第1式に代入しxを消去すると

$$y=\left(\frac{y+3}{2}\right)^2-4\left(\frac{y+3}{2}\right)+5$$

これを整理して　$y^2-6y+5=0$　…②

この2次方程式の2解を，α'，β' とすると

解と係数の関係から　$\alpha'+\beta'=6$，$\alpha'\beta'=5$ なので

$$(\alpha'-\beta')^2=(\alpha'+\beta')^2-4\alpha'\beta'=6^2-4\cdot5=16$$

したがって，

$\mathrm{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha'-\beta')^2}$

$=\sqrt{4+16}$

$=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$　答

(A，Bを直径とする円の方程式から求める)

ところで，①，②をよく見てみると，

①からは先のように，$x^2-6x+8=0$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$$x=2,\ 4$$

②からは　$y^2-6y+5=0$

$$(y-1)(y-5)=0$$

$$y=1,\ 5$$

というように，対応はともかく，交点のx座標とy座標が出てくる。

そこで $(x^2-6x+8)+(y^2-6y+5)=0$

を作ってみると，これは交点A，Bを直径の両端

とする円の方程式になっている。

したがって，$x^2-6x+y^2-6y+13=0$

$$(x-3)^2-9+(y-3)^2-9+13=0$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2=5$$

であるから，この円の半径は $\sqrt{5}$

AB は直径なので $AB=2\sqrt{5}$ となる。答

こんなことは，普通はやらないが，次節以降で再登場し，力を発揮する。

§2. 放物線と直線の交点を通る放物線・円

> **問題 2**　放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x+1$ の交点と，点$(1,\ 0)$を通る放物線の方程式を求めよ。

(解答)

$$(x^2-2x-y)+k(x-y+1)=0$$

を考えると，これは放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x+1$ の交点を通る曲線を表す。これが，点$(1,\ 0)$を通るから

$$(1^2-2\cdot1-0)+k(1-0+1)=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

したがって，$(x^2-2x-y)+\dfrac{1}{2}(x-y+1)=0$

より，求める放物線の方程式は

$$y=\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{3}$$ 答

これについては，何の問題もないが，同じ設定で「円の方程式を求めよ」と言われたらどうするか。先と同じようにやっても，円は出てこない。

> **問題 3**　放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x+1$ の交点と，点$(1,\ 1)$を通る円の方程式を求めよ。

$$(x^2-2x-y)+k(x-y+1)=0$$

を考えると，これは放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x+1$ の交点を通る曲線を表すが，k の値をどのようにしても，円にはならない。もちろん，

$$k(x^2-2x-y)+l(x-y+1)=0$$

を考えても同じである。

このような問題の場合，2 交点の座標が簡単であれば，「3 点を通る円の方程式を求める」問題として 3 元の連立方程式を作って解いてやるのもいいかもしれない。ところが，問題 1 のように 2 点間の距離を求めるだけならば，交点の座標が多少複雑であっても何とかなるが，今のような問題では，とても求める気にはならない。

2 式から y を消去して，$x^2-2x=x+1$

これを整理して　$x^2-3x-1=0$

これを解いて，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

$y=x+1$ に代入して，$y=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$　(複号同順)

したがって，3 点 $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$, $(1,\ 1)$ を通る円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおいて，代入して，3 元連立方程式を解くと…

なんて，やってられないでしょう。

ではどうすればよいのか。ここで，前節の最後に考えた交点を直径の両端とする円の方程式を使うのである。

(2 交点を直径の両端とする円から求める)

2 式から y を消去して，$x^2-2x=x+1$

これを整理して　$x^2-3x-1=0$　…①

また，第 2 式を $x=y-1$ として，第 1 式に代入し x を消去すると　$y=(y-1)^2-2(y-1)$

これを整理して　$y^2-5y+3=0$　…②

①②から　$(x^2-3x-1)+(y^2-5y+3)=0$

すなわち，$x^2+y^2-3x-5y+2=0$ を作ると，これは 2 交点を直径の両端とする円を表す。これを用いて，$(x^2+y^2-3x-5y+2)+k(x-y+1)=0$ を考えると，これは 2 交点を通る円を表す。

…(注 1)

これが点$(1,\ 1)$を通るので代入して，k の値を求めてやると，$k=4$ だから

$$(x^2+y^2-3x-5y+2)+4\cdot(x-y+1)=0$$

$$x^2+y^2-3x-5y+2+4x-4y+4=0$$

$$x^2+y^2+x-9y+6=0$$ 答

というように，(複雑な) 3 元連立方程式を解くことなしに，円の方程式を求めることができるのである。

【注 1】「数研通信 No.51 (連立方程式を解きたくない) §2」で，「3 点を通る円の方程式を求める」のに，そのうちの 2 点を通る直線と，その 2 点を直径の両端とする円から，その 2 点を通る円の方程式を作って解いた。それと同じアイデアである。つまり，ここでの「放物線と直線の交点」を「円と直線の交点」に置き換えたのである。

§3. 放物線と放物線の交点を通る円

以上でした考察は，２つの放物線の交点の間の距離を求める問題や，２つの放物線の交点とその他１点を通る円の方程式を求める問題に敷衍することができる。一般に２放物線が２交点を持つときは，２放物線の方程式から，x^2 の項を消去すれば，２交点を通る直線が得られる。

> **問題４**　２放物線 $y=x^2+1$ …① と $y=-x^2+x+2$ …② の交点と，点$(1,\ 0)$を通る円の方程式を求めよ。

①②は交点をもつので

①＋②より，$2y=x+3$ …③　これが交点を通る直線になる。そして，①③から y を消去した x の２次方程式 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$ と，①③から x を消去した y の２次方程式 $y^2-\frac{13}{4}y+\frac{5}{2}=0$ とから

$\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+\left(y^2-\frac{13}{4}y+\frac{5}{2}\right)+k(x-2y+3)$

$=0$ を作ると，これは①②の交点を通る円を表す。これが，$(1,\ 0)$ を通るから代入して，k の値を求めると，$k=-\frac{5}{8}$　よって，

$\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+\left(y^2-\frac{13}{4}y+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{8}(x-2y+3)$

$=0$　整理して　$x^2+y^2-\frac{9}{8}x-2y+\frac{1}{8}=0$

これが求める円の方程式になる。

【注２】　①③から y を消去した x の２次方程式と，①③から x を消去した y の２次方程式の２次の項の係数は，１にしておかないと直径を両端とする円の方程式にはならない。

> ２点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を直径の両端とする円の方程式は，$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

§4. 円と直線の交点を通る放物線

２つの円の交点とその他の１点を通る円の方程式を求める。あるいは，円と直線の交点と他の１点を通る円の方程式を求めるのは基本的である。しかし，そのアイデアでは，同じ設定での放物線の方程式は求められない。

> **問題５**　円 $x^2+y^2-2x-4y+2=0$ …① と直線 $y=x+1$ …② の交点と，原点を通る放物線の方程式を求めよ。

①②の交点を通る曲線の方程式として $(x^2+y^2-2x-4y+2)+k(x-y+1)=0$ を考えてもこれは，円にはなるが放物線にはならない。ならば，問題３と同様，①②の交点の座標を求めて，３点を通る放物線の方程式を，３元連立方程式を解いて求めるか。

②を①に代入して，整理すると　$2x^2-4x-1=0$

これを解いて，$x=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

②に代入して，$y=\frac{4\pm\sqrt{6}}{2}$　(複号同順)

したがって，３点$\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2},\ \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$，$\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2},\ \frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)$，$(0,\ 0)$ を通る放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおいて，代入して，３元連立方程式を解くと……求められるはず…。

これもややこしい　3元連立方程式を解かなくては無理なのか，と言うとそうでもない。今度はこうする。

(x の２次式を導く解法)

②を①に代入して y を消去すると

$2x^2-4x-1=0$ すなわち $x^2-2x-\frac{1}{2}=0$

これを用いて，

$y=a\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)+x+1$ を作るとこれは①②の交点を通る放物線を表す。…(注３)

これが今，原点を通るので代入して

$0=a\left(0^2-2\cdot0-\frac{1}{2}\right)+0+1$ より　$a=2$

よって求める放物線の方程式は

$y=2\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)+x+1$

すなわち $y=2x^2-3x$ となる。答

【注３】　「数研通信 No.51 (連立方程式を解きたくない) §3」で，「３点を通る放物線の方程式を求める」問題で，**【定式】**として提案したもの

> **【定式】**　直線 $y=mx+n$ との交点の x 座標が $\alpha,\ \beta$ である放物線の方程式は，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)+mx+n$ (ただし，$a\neq0$)

を用いた。「数研通信 No.51」では，この後，接線に展開していったが，それとは違う方向への応用である。

§5. 円と円の交点を通る放物線

> **問題 6**　2 つの円 $x^2+y^2+x-y-1=0$ …① と $x^2+y^2-2x-4y+2=0$ …② の交点と，原点を通る放物線の方程式を求めよ。

本質的には，先の問題 5 と同じである。もちろん，交点の座標を求めてやるのではない。

(x の 2 次式を導く解法)

①−②より，$y=-x+1$　これを①に代入して

$2x^2-1=0$　ここで，(これを解きたくなるのを辛抱して) $x^2-\dfrac{1}{2}=0$ として，求める放物線を

$y=a\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)-x+1$ とおく。これが，原点を通ることから，$0=a\left(0^2-\dfrac{1}{2}\right)-0+1$ より $a=2$

よって，求める放物線は，$y=2\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)-x+1$

すなわち $y=2x^2-x$ となる。答

§6. 問題 2 再考

§4 のアイデアを使うと，以下のように，問題 2 についての別法ができる。

$y=x^2-2x$ …① と $y=x+1$ …② から，y を消去して $x^2-2x=x+1$ より $x^2-3x-1=0$

ここで，$y=a(x^2-3x-1)+x+1$ を作ると，①②の交点を通る放物線になる。これが点 $(1,\ 0)$ を通ることから，$0=a(1^2-3\cdot1-1)+1+1$　∴ $a=\dfrac{2}{3}$

よって，$y=\dfrac{2}{3}(x^2-3x-1)+x+1$ より

$y=\dfrac{2}{3}x^2-x+\dfrac{1}{3}$ となる。

§7. 補足

§4 から §6 の中で数研通信 No.51 の【定式】を使っているが，この【定式】では，$y=ax^2+bx+c$ を，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)+mx+n$ と表したので，x^2 の係数が a になるように，例えば問題 5 では，

$y=a\left(x^2-2x-\dfrac{1}{2}\right)+x+1$ とやったが，

$y=A(2x^2-4x-1)+x+1$ とすることもできる。私見では，前者の方がよいと考えるので，そのようにしている。

§8. さいごに

今回の内容は，「数研通信 No.51 (連立方程式を解きたくない)」の続きの続きといったもので，「2 次方程式を解きたくない」という感のものである。解いた後どうするかを見越せば，解きたくないと思うのである。その気持ち，感覚を生徒にも持って欲しい。

先般も，数研通信 No.56 で「2 次方程式の解の公式で，約分をしたくない」とやったところで，「やりたくないシリーズ」みたいになっているが，その精神こそ数学だと思っている。

生徒には，方程式を解くときには，何のために (何を求める，何を出すために) 解くのかということを考えるのはもちろん，加えて，その方程式が何を表しているのかといったことにも考えを向けて欲しいと思う。解ければいい，答えが出ればいいんじゃない。そして，今回もそういったことが上手く伝わったらいいなと思っている。

(兵庫県立武庫荘総合高等学校)