三角形の決定における考察

宮田（みやた）　毅一郎（きいちろう）

§0. はじめに

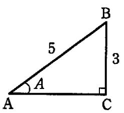
数学Iにおいて，三角形を構成する3つの辺と3つの角の要素のうち「三角形の決定」として，正弦定理や余弦定理を用いて3要素から残りの3要素を求める。教科書では特別な角を中心に扱っているので，教科書通りの流れで授業を行うとそこまでに至る際にいくつか忘れがちなことがある。

高校用の教科書・参考書や公式集では見かけないが，技術者用の数学公式集に載せられている正接定理(後述)から考えたことや過去生徒からの質問事項から考察した内容をまとめてみた。

§1. 直角三角形の内角を求める

問題　下の図の直角三角形において，角Aは約何度か。

(1)



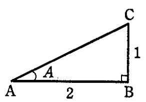
解答　$\sin A=\dfrac{3}{5}=0.6$

表から　$\sin 36°=0.5878$

$\sin 37°=0.6018$

よって　$A≒37°$　答

(2)



解答　$\tan A=\dfrac{1}{2}=0.5$

表から　$\tan 26°=0.4877$

$\tan 27°=0.5095$

よって　$A≒27°$　答

【解説】　このように，私たちは最も近い値の角を読みとるように指導している。

関数 $y=\sin x\,(y=\tan x)$ のグラフは $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ $(0°<x<90°)$ であるとき，単調増加(正確には非減少関数)である。

例えば，$y=\tan x$ の場合

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad y''=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0$$

よりグラフは下に凸になる。これより次のことが成り立つ。

> 実数 a，$b\left(0<a<\dfrac{\pi}{2},\ 0<b<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して
>
> $$\tan\frac{a+b}{2}\leqq\frac{1}{2}(\tan a+\tan b)$$
>
> ($a=b$ のとき等号成立)

このことより，三角方程式を解く際に，角の変化量と三角比の値の変化量が比例すると考えると僅かではあるが，誤差が生じることがわかる。その誤差に注意して考えてみよう。

三角比の表を利用することを念頭に，先の問題において相関性を考えると $x_1<x<x_2$ であるとき，x が x_1 より x_2 に近いとき $\sin x\,(\tan x)$ も $\sin x_1\,(\tan x_1)$ より $\sin x_2\,(\tan x_2)$ に近く，逆に $\sin x\,(\tan x)$ が $\sin x_1\,(\tan x_1)$ より $\sin x_2\,(\tan x_2)$ に近いとき，x が x_1 より x_2 に近いと考えて解答している。

しかし，関数電卓によると

$\tan 83°=8.144346\cdots≒8.1443$

$\tan 84°=9.514364\cdots≒9.5144$

$\tan 83.5°=8.776887\cdots≒8.7769$

$$\frac{\tan 83°+\tan 84°}{2}=8.829355\cdots≒8.8229$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan 83°+\tan 84°}{2}\right)=\tan^{-1}(8.829355\cdots)$$
$$=83.538298\cdots$$
$$≒83.5383$$

これより，$83.5°<x<83.5383°$ であるとき，x は $83°$ より $84°$ に近いが，$\tan x$ は $\tan 84°$ より $\tan 83°$ に近い。

同様に，より $90°$ に近い角について考えると

$\tan 88°=28.636253\cdots≒28.6363$

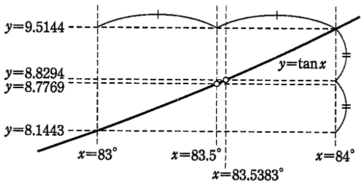
$\tan 89°=57.289961\cdots≒57.2900$

$\tan 88.5°=38.188459\cdots≒38.1885$

$$\frac{\tan 88°+\tan 89°}{2}=42.963107\cdots≒42.9631$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan 88^\circ+\tan 89^\circ}{2}\right)=\tan^{-1}(42.963107\cdots)$$
$$=88.666636\cdots$$
$$\fallingdotseq 88.6666$$

これより，$88.5^\circ<x<88.6666^\circ$ であるとき，x は 88° より 89° に近いが，$\tan x$ は $\tan 89^\circ$ より $\tan 88^\circ$ に近い。



先に述べたように角の変化量と三角比の値の変化量が比例すると考えると誤差が生じる。特に，1次補間は，90° に近い角の正接で誤差が大きくなる。

【参考】 $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

右辺の級数の収束半径は1である。項別積分を行うと $|x|<1$ ならば

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-$$
$$\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

を得る。

これらを利用して手計算で具体的数字を求めようとすることはかなり難しい。関数電卓という「力業」を利用してこそ，このような値を得ることができると言える。

§2. 三角形の決定

下記の2辺と夾角が与えられたときの場合の問題を解いてみよう。

> **問題1** △ABC において，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=60^\circ$ のとき，次のものを求めよ。

(1) a

解答 余弦定理により

$$a^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 60^\circ$$
$$=4+(4+2\sqrt{3})-4\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}=6$$

$a>0$ より $a=\sqrt{6}$ …答

(2) B

解答 正弦定理により，$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$

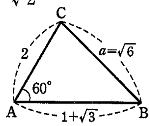
$$\sin B=\frac{2\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$B=45^\circ$，135°

$A=60^\circ$ より，B は

$0^\circ<B<120^\circ$ であるから，

$B=45^\circ$ …答



別解 $\cos B=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$B=45^\circ$

(3) C

解答 $C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$ …答

> **問題2** △ABC において，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=30^\circ$ のとき，次のものを求めよ。

(1) a

解答 余弦定理により

$$a^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 30^\circ$$
$$=4+(4+2\sqrt{3})-4\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2$$

$a>0$ より $a=\sqrt{2}$ …答

(2) B

解答 正弦定理より，$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

$$\sin B=\frac{2\sin 30^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

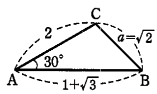
よって，$B=45^\circ$，135°

最大辺 c の対角が最大角であるから，B は最大角ではない。これより，B は鋭角であるから

$B=45^\circ$ …答

別解 $\cos B=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

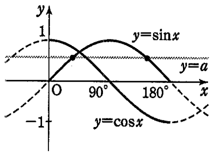


よって，$B=45^\circ$

(3) C

解答 $C=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$ …答

【解説】 正弦定理から $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ としても，B は求められるが，$0°<B<180°$ の範囲でこれを満たす B は一般に２つあり，そのどちらをとるかの検討が必要になる。(2)において B を解答するにあたり，ともに答えの候補が２つあるが，問題１では A の角度から１つの候補が存在しないのでそれが消え，問題２では「角の大小と対辺の大小とが一致する」ことより候補が１つ消えている。同じタイプの問題であるが，不適な候補の消し方が異なる。しかし，余弦定理では答えが唯一確定する。



(2)の答えの候補が２つあるのは図のように $y=\sin x$ $(0°<x<180°)$ であるとき，$a(0<a<1)$ に対して $a=\sin x$ を満たす x が２つある，つまり逆関数である $y=\sin^{-1}x$ が２価関数であることによる。

この点を考慮すると，他の２角を求める方法は正弦定理でなく余弦定理を使うように統一した指導にするか，または敢えて正弦定理を利用しその注意を強調していくかとなる。

§3. 第１余弦定理から求まるもの

第１余弦定理(正射影の定理)

$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B & \cdots① \\ b=c\cos A+a\cos C & \cdots② \\ c=a\cos B+b\cos A & \cdots③ \end{cases}$$

において，①$\times a-$②$\times b-$③$\times c$ より第２余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

が求められることはよく知られている。

ここで，

②＋③ より

$$b+c=(b+c)\cos A+a(\cos B+\cos C)$$

よって，

$$(b+c)(1-\cos A)=a(\cos B+\cos C) \quad \cdots④$$

同様に，②−③ より

$$(b-c)(1+\cos A)=-a(\cos B-\cos C) \quad \cdots⑤$$

ここで，２倍角の公式より

$$1+\cos A=1+\cos\left(2\times\frac{A}{2}\right)=1+\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)$$
$$=2\cos^2\frac{A}{2}$$

同様に，

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}$$

また，和積公式より

$$\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\cos B-\cos C=-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

ここで，$A+B+C=180°$ より $\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}$ であるから

$$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$$

これらを④，⑤に代入すると

$$(b+c)\cdot 2\sin^2\frac{A}{2}=2a\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

より

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}$$

が成り立つ。同様に

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}$$

が成り立つ。(これを**モルワイデの方程式**という)

この２つを辺々割って，左辺と右辺を入れ替えると

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

が求まる。(これを**正接定理**という)

正接定理により A より，$B-C$ が求まるので，$B+C=180°-A$ と組み合わせて連立方程式を解けば B，C が求まる。

実際，正接定理を用いて先の問題１の B，C を求めてみると

$$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\tan 30°}$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=-2+\sqrt{3}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=-(2-\sqrt{3})$$
$$=-\tan 15^\circ=\tan(-15^\circ)$$

より　$\dfrac{B-C}{2}=-15^\circ$

よって，$B-C=-30^\circ$

また，$B+C=120^\circ$ より $B=45^\circ$，$C=75^\circ$ となる。

この方法で問題になるのは，特別な角の場合を除けば，$\tan\dfrac{B-C}{2}$ の値から正確に $\dfrac{B-C}{2}$ が求められるかである。三角比の表から近似の値を利用して求めると，多少の誤差が出る可能性がある。

§4. 加法定理

次のような式変形により加法定理を導くことができる。

正弦定理によって，外接円の半径をRとするとき

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$$

これを，第1余弦定理

$$c=a\cos B+b\cos C$$

に代入すると

$$2R\sin C=2R\sin A\cos B+2R\sin B\cos A$$

両辺を $2R$ で割れば

$$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

ここで，$A+B+C=180^\circ$ であるから

$$\sin C=\sin\{180^\circ-(A+B)\}=\sin(A+B)$$

よって，

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\cos B$$

さらに変形すると

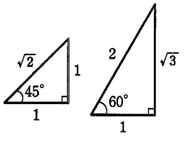
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

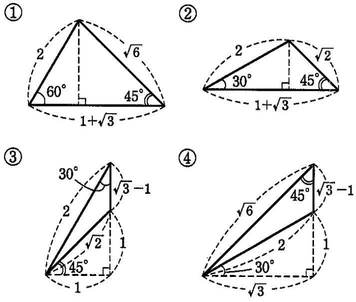
を求めることができる。これより，正弦定理および第1余弦定理から三角形の内角の値の範囲で加法定理が導かれる。

§5. 頻出問題の問題点

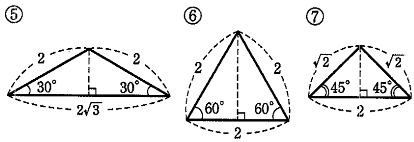
教科書の頻出問題を加法定理の観点で考えて見ると問題の見方も変わるかもしれない。

三角比の表を用いないで，三角形の3要素から残りの3要素すべてを求める問題となると，数値は変わってもいずれかの右図の2つの直角三角形を組み合わせた次のようなパターンに限られてくる。





※　③，④は $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ のヒントを与えられて出題されることもある。



教科書等で頻繁に出題される問題が①～④のようなパターンに限られるとしたら，うまく見当をつけて点線のような補助線を引けばすぐに答えは求まる。

しかし，正弦定理や余弦定理を用いて三角形の3要素から残りの3要素を求めるといった本来の目的から逸脱する可能性がある。

§6. おわりに

例えば，3辺の長さが与えられた場合に1つの角だけを求める場合はその角は特別な角であるような出題が多くなりがちだが，三角比の表を使うまでの問題はあまり見ない。

教科書があまりにもうまく？できているので，図を書けば答えが推測できる場合もありそうだ。

昨今，関数電卓等が安直に利用できる時代になった。これらを数学教育に導入することに拒否する理由もないが，あくまで数学教育の補助手段として位置付けて授業を行うことを意識すればよいと思う。

（金沢市立工業高等学校）