ある条件下にある三角形の面積比

大塚（おおつか） 秀幸（ひでゆき）

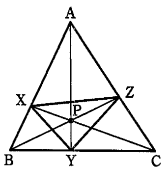
§0. はじめに

今回は幾何の問題に不等式を使った話題に焦点をあてる。高校の教科書では，図形と不等式の接点は「領域」くらいで，図形間の関係を不等式で表すことはあまりない。

本稿はある条件を満たす三角形どうしの関係を不等式で表す話題を集めた。これらは単なる教材としてだけでなく，幾何の定理としても非常に興味深い内容となっている。

§1. ある条件下にある三角形の面積比 1

【定理 1】 右の図のように $\triangle$ABC の内部に点 P をとり，直線 CP と辺 AB の交点を X，直線 AP と辺 BC の交点を Y，直線 BP と辺 AC の交点を Z とする。



このとき，$\triangle \mathrm{XYZ} \leqq \frac{1}{4}\triangle \mathrm{ABC}$

【証明】

$\mathrm{AX}:\mathrm{BX}=x:(1-x)$，$\mathrm{BY}:\mathrm{CY}=y:(1-y)$，
$\mathrm{CZ}:\mathrm{AZ}=z:(1-z)$ $(0<x, y, z<1)$

とおくと，チェバの定理より

$$\frac{x}{1-x}\times\frac{y}{1-y}\times\frac{z}{1-z}=1$$

よって，$xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ …①

$$xyz=1-x-y-z+xy+yz+zx-xyz$$

$$2xyz=1-x-y-z+xy+yz+zx \quad \cdots②$$

ところで，相加・相乗平均の大小関係より

$$\sqrt[6]{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$\leqq\frac{x+y+z+(1-x)+(1-y)+(1-z)}{6}=\frac{1}{2}$$

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z)\leqq\frac{1}{64}$$

$$(xyz)^2\leqq\frac{1}{64} \quad (①より)$$

$$xyz\leqq\frac{1}{8} \quad \cdots③$$

また，$\triangle \mathrm{AXZ}=\dfrac{\mathrm{AX}\cdot\mathrm{AZ}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}\times\triangle \mathrm{ABC}$

$$=x(1-z)\times\triangle \mathrm{ABC}$$

$$\triangle \mathrm{BXY}=\frac{\mathrm{BX}\cdot\mathrm{BY}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}}\times\triangle \mathrm{ABC}$$

$$=y(1-x)\times\triangle \mathrm{ABC}$$

$$\triangle \mathrm{CYZ}=\frac{\mathrm{CY}\cdot\mathrm{CZ}}{\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CA}}\times\triangle \mathrm{ABC}$$

$$=z(1-y)\times\triangle \mathrm{ABC}$$

よって，

$$\triangle \mathrm{XYZ}=\{1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y)\}\times\triangle \mathrm{ABC}$$

$$=(1-x-y-z+xy+yz+zx)\times\triangle \mathrm{ABC}$$

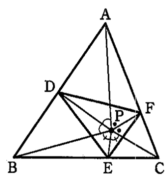
$$=2xyz\times\triangle \mathrm{ABC} \quad (②より)$$

$$\leqq\frac{1}{4}\triangle \mathrm{ABC} \quad (③より)$$

等号成立は，$x=y=z=1-x=1-y=1-z=\frac{1}{2}$ のとき，つまり，P が $\triangle$ABC の重心のとき等号は成立する。 ■

§2. ある条件下にある三角形の面積比 2

【定理 2】 右の図のように $\triangle$ABC の内部に点 P をとり，$\angle$APB の二等分線と辺 AB の交点を D，$\angle$BPC の二等分線と辺 BC の交点を E，$\angle$CPA の二等分線と辺 CA の交点を F とする。



このとき，$\triangle \mathrm{DEF}\leqq\frac{1}{4}\triangle \mathrm{ABC}$

【証明】

PA$=x$, PB$=y$, PC$=z$ とすると，角の二等分線の性質により

AD：BD$=x：y$，BE：CE$=y：z$，

CF：AF$=z：x$

したがって，$\triangle ADF=\dfrac{AD\cdot AF}{AB\cdot AC}\times\triangle ABC$

$$=\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}\times\triangle ABC$$

$$\triangle BDE=\frac{BD\cdot BE}{BA\cdot BC}\times\triangle ABC$$

$$=\frac{y^2}{(y+x)(y+z)}\times\triangle ABC$$

$$\triangle CEF=\frac{CE\cdot CF}{CB\cdot CA}\times\triangle ABC$$

$$=\frac{z^2}{(z+y)(z+x)}\times\triangle ABC$$

よって，

$$\triangle DEF=\left(1-\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}-\frac{y^2}{(y+x)(y+z)}-\frac{z^2}{(z+y)(z+x)}\right)\times\triangle ABC$$

$$=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\times\triangle ABC$$

$$\leqq\frac{2xyz}{2\sqrt{xy}\times2\sqrt{yz}\times2\sqrt{zx}}\times\triangle ABC$$

（∵ 相加・相乗平均の関係）

$$=\frac{2xyz}{8xyz}\times\triangle ABC$$

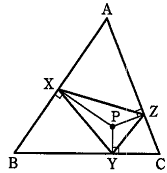
$$=\frac{1}{4}\triangle ABC$$

等号成立は PA=PB=PC ($x=y=z$) のとき（すなわちPが△ABCの外心のとき） ∎

§3. ある条件下にある三角形の面積比 3 （挑戦問題）

上の2つの問題は設定を少し変えただけで，全く別の証明となった(結果は同じなのに…)。それでは，次の定理はどうだろうか。

【定理3】 右の図のように△ABCの内部に点Pをとり，Pから辺ABにおろした垂線の足をX，辺BCにおろした垂線の足をY，辺CAにおろした垂線の足をZとする。このとき，$\triangle XYZ\leqq\dfrac{1}{4}\triangle ABC$



この定理の証明はふせておきますので挑戦してみてください。

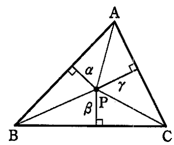
§4. おわりに

図形間の関係を不等式で表す問題で有名なものとして，「Erdös の問題」がある。非常に簡単な内容ではあるが，初等的な証明をするには巧妙な技術が必要となってくるため奥が深い。複雑なだけでつまらない問題よりも，設定が簡単明瞭であるこの手の問題が数学教育上重要であると私は思う。解けても解けなくても時間をかけて楽しみながら思考をめぐらせる経験を多くの生徒にさせたいものである。

「Erdös の問題」(1935年P. Erdös によって与えられた問題)

△ABC内の1点Pから各辺におろした垂線の長さをα，β，γとすると，

$$PA+PB+PC\geqq2(\alpha+\beta+\gamma)$$



《参考文献》

〔1〕 岩田至康編　槇書店「幾何学大辞典1」p.379，380

（東京都　元文教大学付属高等学校）