連続な2数の積は1桁目から0がどこまで続くか

野沢（のざわ） 清人（きよと）

§1．はじめに

2^{100} の最高位の数は，対数を用いてわかり，1の位の数は，2^n の周期性を調べれば簡単に求まる。そこで，2桁目の数を求める方法がないかを考えてみた。2^n の周期性や数列を使って求められるが，もっと他の方法がないかを考えているうちに，面白い性質を持つ整数に気がついた。その話をしてみたい。

§2．連続した整数の積で0が続く条件

連続な2数の積で，1桁目から0が最も多く続く最小の2数は何かを考えてみる。ただし，連続な2数で1の位が0の数は除くことにする。

例えば，$25\times24=600$

2桁目まで連続して0が続く

このとき明らかに，連続する数の1つは1の位が5であり，他方は4か6である。

$n(n-1)=n^2-n$ から連続した自然数 n と $n-1$ の積で0が続くのは，n^2 と n の1の位からの数が連続で一致する場合である。

そこで n^2 と n が何桁目まで連続で一致するのか，そのときの最小の数は何かを調べてみる。

まず，1桁の数では，1，5，6の3つがある。

$1^2=1$，$5^2=25$，$6^2=36$

次に2桁の数で，平方しても2桁目までが変わらない数は，□1，□5，□6の形をした数であるから，実際に調べてみると，25と76だけであることが確かめられる。

$25^2=625$　　$76^2=5776$

§3．2桁までが25の整数

まず，25の方から調べてみよう。

3桁の数では，625がある。

$625^2=390625$

4桁の場合，平方した数は4桁目が0なので，4桁の数では存在しないが，5桁の数では，平方した数の4桁目がどの数も0になるので復活してくる。

5桁の数では，90625である。

$90625^2=8212890625$

6桁の数では，890625である。

$890625^2=793212890625$

7桁の数では，2890625である。

$2890625^2=8355712890625$

8桁の数では，12890625である。

$12890625^2=166168212890625$

以下同様にして，n^2 と n は，n まで連続で一致することがわかる。

したがって，この場合連続な2数の積は，1桁目から0が，n 個以上続く。

(例)　$n=12890625$ のとき

$12890625\times12890624=166168200000000$

§4．2桁までが76という整数

次に，76の方を調べてみよう。

3桁の数では，376だけである。

$376^2=141376$

4桁の数では，9376であることがわかる。

$9376^2=87909376$

5桁の数では，□9376の平方の数が，5桁目まで一致する数は存在しない。

よって，n^2 と n は最大4桁目まで連続で一致し，そのときの n の最小の数は9376であることがわかる。

したがって，連続な2数の積で，1桁目から0が最も多く続くのは，5個であり，最小の数は，9376と9375である。

$9376\times9375=87900000$

§5．76という整数の性質について

$100-76=24$，$150-76=74$，$100-74=26$ より

2桁の自然数を平方して，2桁目までが76になる数は，24，26，74，76である。よって二項定理により，24^k，26^l，74^m（k，l，m は偶数の自然数）は，2桁目までの数は76である。

$2^{10}=1024$ であることと，この性質を利用することにより，2^n の2桁目までの数を簡単に求めることができる。

(例)　2^{100} の2桁目までの数を求めよ。

(解)　$2^{100}=(2^{10})^{10}=1024^{10}$

よって，2^{100}の2桁目までの数は，24^{10} の2桁目までの数と一致するので，2桁目までの数は76である。

《参考文献》

〔1〕　話題源数学 上　とうほう

(埼玉県立伊奈学園総合高等学校)