円の面積公式 $S=\pi r^2$ の循環論法の解消について

山川（やまかわ）　宏史（ひろふみ）

§1. はじめに

円の面積公式は小学校で学習する内容である。公式の導き方が，円の面積を長方形の面積に置き換えるという極限的な考え方を含むもので，児童にとっては生まれて初めての考え方に，大きなギャップと少なからぬ感動を覚えるものと思われる。

高校の数学Ⅲ「積分法の応用」で，置換積分を用いて初めて体系的に円の面積公式の証明が完成され，めでたしめでたしとなるわけである。しかし，以下の図式のように，一連の証明の流れは循環論法になっており，証明が完成したとは言い難い。さらに悪いことに，高校の授業ではこの点に触れずにすませたり，「実は循環論法である」と認めるだけで終わることが多い部分である。本論文では，この循環論法の解消についての考察を試みた。

§2. 教科書における円の面積公式 $S=\pi r^2$ の循環論法の図式

円の面積公式 $S=\pi r^2$

↓

扇形の面積公式 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

↓

面積評価 $\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta<\dfrac{1}{2}r^2\theta<\dfrac{1}{2}r^2\tan\theta$

↓

はさみうちの原理で $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

↓

$(\sin x)'=\cos x$

↓

$\displaystyle\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta r\cos\theta\,d\theta=\frac{\pi r^2}{4}$

↓

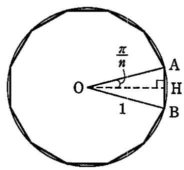
円の面積公式 $S=\pi r^2$

§3. 循環論法解消の具体的方法

§2 の図式のいずれかの事項を他とは独立に証明することになる。ただし，何をどこまで仮定するかが問題となってくる。

【その１】 円が正多角形の極限であることを利用するもの

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1}$$



証明　右の図において，中心 O，半径 1 の円に内接する正 n 角形の周の長さ l は

$$l=2n\mathrm{AH}=2n\sin\frac{\pi}{n}$$

円が正多角形の極限であることを認めると，π の定義により

$$\lim_{n\to\infty}l=2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{\pi}{n}=2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1\quad\cdots\cdots①$$

$\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるような正数 θ に対して，$n=\left[\dfrac{\pi}{\theta}\right]$ とおく（[　] は Gauss 記号)。$n\geqq 2$ であり

$$\left[\frac{\pi}{\theta}\right]\leqq\frac{\pi}{\theta}<\left[\frac{\pi}{\theta}\right]+1$$

すなわち，$n\leqq\dfrac{\pi}{\theta}<n+1$

よって，$\dfrac{\pi}{n+1}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{n}$

区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $\sin x$ の単調増加性から

$$\sin\frac{\pi}{n+1}<\sin\theta\leqq\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n}}<\frac{\sin\theta}{\theta}<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n+1}}$$

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{n}}<\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{n+1}}$$

$\theta\to+0$ すなわち，$n\to\infty$ にすると，①とはさみうちの原理により

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

左極限は，$\theta=-\theta'$ の置き換えをするとよい。 終

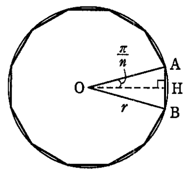
注　円が正多角形の極限であることのみ仮定しているので，循環論法の解消になっている。比較的易しい方法で $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ の証明ができている。面積の評価ではなく，曲線の長さの評価ですませる点が循環論法解消のポイントである。私は，積分が終わったあとの授業において「循環論法になっている」ことを指摘した後に，この方法で説明することがある。しかしながら，①式は $\theta\to+0$ の近づき方が $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ という特殊な数列で近づく場合限定であり，これをはさみうちの原理で修正する必要がある点が難しい。この点を解消する解法は【その1′】である。なお，区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $\sin x$ の単調増加性は $\sin x$ の定義から明らかであろう。現在，すべての教科書では，扇形の面積を $\sin\theta$ と $\tan\theta$ で評価し，はさみうちの原理を用いる証明方法が採用されている。学習指導要領解説によると，内容の取扱いにおいて「三角関数の極限では，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を扱う。」と書かれているだけである。扇形の面積公式を必要とする方法よりも，π の定義だけを用いるこの方法のほうが，数学の論理の厳密性において遙かに優るものと思うのだが，いかがなものであろうか。

【その1′】【その1】の①式を利用するもの

$$\boxed{S=\pi r^2}$$

証明　①式までは【その1】と同じ。

中心O，半径 r の円に内接する正 n 角形について，右の図において



$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$=r^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

であるから，正 n 角形の面積 S_n は

$$S_n=nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

半径 r の円が正 n 角形の極限であることを認めると，①によりその面積 S は

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\pi r^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\quad\cdots\cdots②$$

$$=\pi r^2$$ 終

注　【その1】の後半部分の難しさは解消してすっきりしているが，②式において

$$S=\lim_{n\to\infty}\pi r^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2}r\cdot\left(\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{\pi}{n}\right)r\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}r\cdot2\pi r=\pi r^2$$

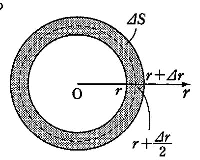
であるから，小学生が学ぶ方法と本質的には変わらないことになる。

【その2】円周率の定義 $l=2\pi r$ を r 方向に積分するもの

$$\boxed{S=\pi R^2}$$

証明　半径 r の円の面積を $S(r)$ とおくと半径 r の増分 Δr に対して，面積の増分 ΔS は

$2\pi\left(r+\dfrac{\Delta r}{2}\right)\cdot\Delta r$ であるから



$$\frac{dS}{dr}=\lim_{\Delta r\to0}\frac{\Delta S}{\Delta r}$$

$$=\lim_{\Delta r\to0}2\pi\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)$$

$$=2\pi r$$

よって

$$S=\int_0^R 2\pi r dr=\Big[\pi r^2\Big]_0^R=\pi R^2 \quad \boxed{\text{終}}$$

注　バウムクーヘン積分の公式 $V=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$ の2次元版である。単純であるが，$\varDelta S$ を求める際に，円環の求積に Pappus-Guldin の定理の2次元版を用いるか，円環を切り開いて台形として考えなければならない点が循環論法を解消しているかどうか微妙。これが無理であれば，円環を引き伸ばして，その面積を長方形の面積と見て積分することになるが，厳密性に欠けるかもしれない。また，r 方向の積分を要するので，生徒には理論面でやや難しい。授業では軽く触れる程度ですましている。球の表面積 $S=4\pi r^2$ に対して，玉ねぎ皮むき積分(？)により，体積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ も同様。しかし，学習指導要領解説によると「なお，面積や体積に関連して，区分求積法の考えに基づいて定積分を理解させたり，積分法の記号の意味を理解させたりすることも考えられる。例えば，半径 r の球の体積を $V(r)$，表面積を $S(r)$ とするとき，$V'(r)=S(r)$ が成り立つことから，球の体積がわかれば球の表面積についても求めることができる。」と書いてあるので，文部科学省もこの証明法を一応認めていることになるのではないだろうか。

【その3】 曲線の長さ公式，弧度法の定義，逆関数の微分公式を使うもの

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1}$$

証明　(これについては，参考文献〔4〕を参照。ここでは省略)

§4. おわりに

循環論法の解消には【その1】が最適であると思う。そういえば，昔の数学Ⅲの教科書では，$(\sin x)'=\cos x$ の証明をするのに三角関数の和積交換公式を用いていたが，現在では，三角関数の加法定理を用いている。学習指導要領解説によると，「$\sin x$ の導関数は，$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$，$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0$ を利用して求めることができる。三角関数の和及び差を積に変換する公式を導いてそれを利用することも考えられる。」と書いてあるのが根拠である。このように，時代の流行により教科書の記述が変化するわけであるから，近い将来には，論理的に無理のない方法で $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ の証明を記述して欲しい。授業で批判するだけでは面白くないし，ごまかしのない方法で証明しないと，数学の論理性厳密性を伝えるということに矛盾する。何らかの易しい方法で循環論法が解消できれば良い。これについては，広く勉強するとともに，何か別の問題を考えているときに意外なところから簡単に証明ができる可能性があるかもしれないので，今後の研究テーマの1つとしてとっておきたい。

なお，最近では小学校での指導方法にも工夫が研究され，トイレットペーパーを半分に分断し，押しつぶして断面積を考えることにより，円の面積を小学生に教える方法も研究されているようである。詳しくは，参考文献〔8〕を参照。この中で【その2】に相当するような考え方で円の面積を導いている。昨年度，毎日新聞2006年4月3日朝刊にこのアイデアの特集記事が掲載された。このような楽しい話題が新聞紙上をもっと賑わせてもらいたい。

《参考文献》

〔1〕 すべての数学Ⅲの教科書
〔2〕 文部省 編　平成11年12月　高等学校学習指導要領解説　数学編理数編　実教出版
〔3〕 大木 実 著　1990　「円の面積について」　数研通信　No.9　数研出版
〔4〕 古川 昭夫 著　1991　新版　微積分ノート　SEG 出版
〔5〕 瀬山 士郎 著　1997　基礎の数学　線形代数と微積分　朝倉書店
〔6〕 一松 信 著　1982　解析学序説　上巻(新版)　裳華房
〔7〕 河野 伊三郎 著　1982　微積分入門　岩波全書
〔8〕 岡部 恒治 著　1997　マンガ数学感覚　筑摩書房
〔9〕 切抜き速報　教育版　P20　人はなぜ「数学」につまずくのか？　ニホンミック
〔10〕 岡山朝日研究紀要　第28号　2007.3

(岡山県立岡山朝日高等学校)