小数部分が$\frac{1}{p}$，$1-\frac{1}{p}$に等しい正の実数pに関する考察

村井（むらい）　靖雄（やすお）

§1．考察のきっかけ

平成17年度会津大学の入試問題に次のような問題がありました。今回の考察に関係するところのみ改題して掲載します。

> 次の極限を求めよ。
> $$\lim_{n\to\infty}\sin\{2\pi(1+\sqrt{2})^n\} \tag{1}$$

$1+\sqrt{2}>1$ ですから，数列 $\{(1+\sqrt{2})^n\}$ は正の無限大に発散します。しかし，$|1-\sqrt{2}|<1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\{2\pi(1-\sqrt{2})^n\}=0 \tag{2}$$

であることと，数列 $\{(1+\sqrt{2})^n\}$ と $\{(1-\sqrt{2})^n\}$ が，自然数の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて，

$$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2} \tag{3}$$

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2} \tag{4}$$

であることが帰納的に証明でき，これを用いると，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\{2\pi(1+\sqrt{2})^n\}=0 \tag{5}$$

であることがわかります。

入試問題では，これで完結するわけですが，これでは，$(1+\sqrt{2})^n$ の性質がよく見えてきません。そこで，この数のどういう性質によって上記の極限が0になるかを考察してみました。

少々まわりくどいところがあるかもしれませんが，定理の証明までにいたった考察の経緯をなるべく時間軸に沿って話していきたいと思います。

§2．$(1+\sqrt{2})^n$ の整数部分・小数部分の帰納的考察

$1+\sqrt{2}$ については，以前から無理数を連分数で表すということは，知っていたので，なにげなく，連分数に変形する計算をやってみると，

$$\begin{aligned}1+\sqrt{2}&=2+(\sqrt{2}-1)\\&=2+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}\\&=2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{6}$$

となります。これで，$1+\sqrt{2}$ の整数部分は2で，小数部分は，$1+\sqrt{2}$ の逆数 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ となります。次に，$(1+\sqrt{2})^2$ の小数部分を計算してみると，

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^2&=3+2\sqrt{2}=5+2(\sqrt{2}-1)\\&=5+\frac{2}{\sqrt{2}+1}=5+\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)^2}\\&=5+\frac{3+2\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)^2}=5+\frac{(1+\sqrt{2})^2-1}{(\sqrt{2}+1)^2}\\&=5+\left\{1-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

となります。これで，$(1+\sqrt{2})^2$ の整数部分は5，小数部分は $1-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$ であることがわかります。

さらに，

$$(1+\sqrt{2})^3=14+\frac{1}{(1+\sqrt{2})^3} \tag{8}$$

$$(1+\sqrt{2})^4=33+\left\{1-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^4}\right\} \tag{9}$$

$$(1+\sqrt{2})^5=82+\frac{1}{(1+\sqrt{2})^5} \tag{10}$$

$$\cdots$$

などが成り立つことがわかります。このようにして帰納的に考察すると，$(1+\sqrt{2})^n$ の小数部分は，n が奇数のとき，$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^n}$ であり，n が偶数のとき，$\left\{1-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^n}\right\}$ であることが予想できます。よって，$n\to\infty$ とすると，小数部分は0または1に近づ

くので，$2\pi(1+\sqrt{2})^n$ は 2π の整数倍に限りなく近づくため，(5)が成り立つのではないかと予想できます。

§3．小数部分が $\frac{1}{p}$ で表されるような正の実数 p の視覚化について

実数 $1+\sqrt{2}$ は，小数部分が逆数で表され整数部分が 2 ですから，方程式

$$p-\frac{1}{p}=2 \tag{11}$$

の正の実数解です。そこで，一般に自然数 m に対して，方程式

$$p-\frac{1}{p}=m \tag{12}$$

を満たす正の実数 p についても同様に計算してみます。これは，2 次方程式

$$x^2-mx-1=0 \tag{13}$$

の正の方の解となり，

$$p=\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2} \tag{14}$$

で与えられます。

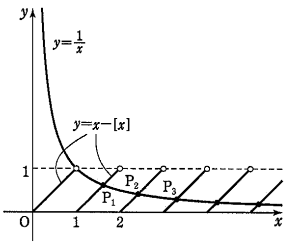
さて，これらの実数 p をグラフで図示してみましょう。

正の実数 p に対して，整数部分をガウス記号 $[p]$ で表せば，小数部分は $p-[p]$ で表されます。よって，(12)を満たす正の実数 p は，次の 2 つの関数

$$y=\frac{1}{x} \tag{15}$$

$$y=x-[x] \tag{16}$$

の表すグラフの交点の x 座標となり，小数部分は y 座標で表されます。



交点を x 座標の小さい方から順に P_1，P_2，…，P_m，… とすると，交点の座標は，

$P_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$，$P_2\left(1+\sqrt{2},\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$，

$P_3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2},\frac{1}{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\right)$，…，

$P_m\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2},\frac{1}{\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}}\right)$，… となります。

これで，小数部分が $\frac{1}{p}$ で表されるような正の実数 p がグラフの交点として表されることがわかりました。

§4．定理の証明

さて，$1+\sqrt{2}$ と同様の性質をもつ(12)を満たす正の実数 p についても，極限(5)や，(7)，(8)，(9)，(10)なども成り立つのではないかと考えられます。

実数 p が 2 次方程式(13)の解であることを利用して，解と係数の関係から，次の 2 つの定理を証明します。

〔定理 1〕 $p-[p]=\frac{1}{p}$ を満たす正の実数 p について，次のことが成り立つ。
すべての自然数 n に対して，

$$p^n-[p^n]=\begin{cases}\frac{1}{p^n} & (n\text{が奇数のとき})\\ 1-\frac{1}{p^n} & (n\text{が偶数のとき})\end{cases} \tag{17}$$

が成り立つ。

〔定理 2〕 $p-[p]=1-\frac{1}{p}$ を満たす正の実数 $p\geqq 1$ について，次のことが成り立つ。
すべての自然数 n に対して，

$$p^n-[p^n]=1-\frac{1}{p^n} \tag{18}$$

が成り立つ。

この定理を段階的に証明していきます。

命題 1　m を自然数とする。このとき，2 次方程式

$$x^2-mx-1=0$$

は異なる 2 つの実数解をもち，2 つの実数解を p，q，$p>q$ とすれば，

$$p>1,\ q<0$$

証明

$y=x^2-mx-1$ は下に凸の放物線であり，$f(x)=x^2-mx-1$ とおくと，$f(1)=-m<0$ かつ $f(0)=-1<0$ であるから，この放物線は，x 軸の $x<0$ と $x>1$ の部分と2点で交わる。 ■

> **命題2**　正の実数 p が
> $$p-[p]=\frac{1}{p}$$
> を満たすための必要十分条件は，ある自然数 m が存在して，正の実数 p が2次方程式
> $$x^2-mx-1=0$$
> の解となることである。

証明

正の実数 p が $p-[p]=\frac{1}{p}$ を満たすとする。

よって，

$$p^2-[p]p-1=0$$

ここで，$m=[p]$ とすると，p は，

$$x^2-mx-1=0$$

の解である。

逆に，2次方程式 $x^2-mx-1=0$ の解で，命題1より，$x=p>1$ となる解がある。よって，$p^2-mp-1=0$ より，

$$p=m+\frac{1}{p}$$

となり，$0<\frac{1}{p}<1$ で，m は自然数だから，$m=[p]$ となり，

$$p-[p]=\frac{1}{p}$$

が成り立つ。 ■

> **命題3**　$m\geqq3$ を満たす自然数を m としたとき，2次方程式
> $$x^2-mx+1=0$$
> は異なる2つの正の実数解 p, q をもち，$q<p$ であれば，　$0<q<1$, $2<p$ である。

証明

$y=x^2-mx+1$ は下に凸の放物線であり，軸は，$x=\frac{m}{2}\geqq\frac{3}{2}$ であり，$f(x)=x^2-mx+1$ とおくと，$f(0)=1>0$, $f(1)=2-m\leqq2-3=-1<0$, $f(2)=5-2m\leqq5-6=-1<0$ であるから，この放物線は，x 軸の $0<x<1$, $2<x$ の部分と2点で交わる。 ■

> **命題4**　正の実数 $p>1$ が
> $$p-[p]=1-\frac{1}{p}$$
> を満たすための必要十分条件は，ある自然数 $m\geqq3$ が存在して，正の実数 $p>1$ が2次方程式
> $$x^2-mx+1=0$$
> の解となることである。

証明

正の実数 $p>1$ が $p-[p]=1-\frac{1}{p}$ を満たすとする。このとき，$p^2-([p]+1)p+1=0$ を満たす。よって，p は，2次方程式 $x^2-([p]+1)x+1=0$ の解である。ここで，$[p]=1$ とすると，この2次方程式は重解 $x=1$ を持つから，$p>1$ であることに反する。よって，$[p]>1$。すなわち，$[p]+1\geqq3$ である。

逆に，$m\geqq3$ とすると，命題3より，$x^2-mx+1=0$ の解 p で，$p>2$ となるものが存在する。よって，$p^2-mp+1=0$ を満たすから，

$$p=(m-1)+1-\frac{1}{p}$$

と変形できる。$m-1\geqq2$ で，$0<1-\frac{1}{p}<1$ であるから，$[p]=m-1$ である。

よって，$p-[p]=1-\frac{1}{p}$ が成り立つ。 ■

定理1の証明

命題2より，ある自然数 m が存在して，実数 p は，次の2次方程式の解である。

$$x^2-mx-1=0$$

命題1より，$p>1$ であり，この2次方程式は異なる2つの実数解をもち，p 以外の解を q とすると，$q<0$ である。解と係数の関係より，

$$p+q=m \tag{19}$$

$$pq=-1 \tag{20}$$

が成り立つ。また，p^n+q^n は正の整数である。なぜなら，$p+q$ は自然数であり，$n\geqq2$ のとき，

$$\begin{aligned}p^n+q^n&=(p^{n-1}+q^{n-1})(p+q)-pq(p^{n-2}+q^{n-2})\\&=(p^{n-1}+q^{n-1})(p+q)+(p^{n-2}+q^{n-2})\end{aligned}$$

と変形できるから，帰納法の仮定により，正の整数である。よって，$M>0$ を整数として，$p^n+q^n=M$ とおける。さらに，$p^nq^n=(-1)^n$ であるから，p^n, q^n は整数係数の2次方程式

$$x^2-Mx+(-1)^n=0 \tag{21}$$

の解である。

(i) <u>n が奇数のとき</u>

p^n は，$x^2-Mx-1=0$ の解であり，$p^n>0$ であるから，命題2より，

$$p^n-[p^n]=\frac{1}{p^n} \tag{22}$$

が成り立つ。

(ii) <u>n が偶数のとき</u>

p^n は，$x^2-Mx+1=0$ の解であり，$p>1$ より，$p^n>1$ である。$p+q=m\geqq 1$ であるから，$n=2$ のとき，$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=m^2+2\geqq 3$ で，$p^n+q^n=(p^{n-1}+q^{n-1})(p+q)+(p^{n-2}+q^{n-2})>p^{n-1}+q^{n-1}$ であるから，帰納法より $M\geqq 3$ である。よって，命題4より，

$$p^n-[p^n]=1-\frac{1}{p^n} \tag{23}$$

が成り立つ。

定理2の証明

$p=1$ のとき，式(18)は，明らかに成り立つ。よって，$p>1$ として，証明する。命題4より，p は2次方程式

$$x^2-mx+1=0,\ m\geqq 3 \tag{24}$$

の解である。このとき，命題3より，この2次方程式は，異なる2つの実数解を持ち，p と異なる実数解を q とすると，$0<q<1$，$2<p$ である。解と係数の関係から，

$$p+q=m \tag{25}$$

$$pq=1 \tag{26}$$

であり，$p^n+q^n>2^n+q^n>2^n\geqq 2$ で，$M=p^n+q^n$ は整数であるから，$M\geqq 3$ である。また，$p^nq^n=1$ であるから，解と係数の関係より，p^n は，2次方程式

$$x^2-Mx+1=0,\ M\geqq 3 \tag{27}$$

の解である。よって，命題4より，

$$p^n-[p^n]=1-\frac{1}{p^n}$$

を満たす。 ■

> **系1** $p-[p]=\dfrac{1}{p}$ を満たす正の実数 p において，
>
> $$\lim_{n\to\infty}(p^{2n}-[p^{2n}])=1 \tag{28}$$
>
> $$\lim_{n\to\infty}(p^{2n-1}-[p^{2n-1}])=0 \tag{29}$$
>
> が成り立つ。

証明

$p>1$ であり，定理1より，

$$\lim_{n\to\infty}(p^{2n}-[p^{2n}])=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p^{2n}}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}(p^{2n-1}-[p^{2n-1}])=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^{2n-1}}=0$$

■

系1より，$n\to\infty$ のとき，小数部分は

$$p^{2n}-[p^{2n}]\to 0.9999999999\cdots$$
$$p^{2n+1}-[p^{2n+1}]\to 0.00000000000\cdots$$

となることがわかります。偶数乗と奇数乗の小数部分の振る舞いが極端になっていることが興味深く感じられます。この理由は，p^n を解の一つに持つ2次方程式の定数項が $(-1)^n$ であることに関係していることが，定理の証明からもわかると思います。

> **系2** $p-[p]=1-\dfrac{1}{p}$ を満たす正の実数 $p>1$ について，次のことが成り立つ。
>
> $$\lim_{n\to\infty}(p^n-[p^n])=1 \tag{30}$$
>
> が成り立つ。

証明 定理2より明らか。 ■

小数部分が $\dfrac{1}{p}$ になる実数と違い，偶数乗，奇数乗によらず，数列 $\{p^n\}$ の小数部分は単調に増加し，0.9999… となることがわかります。

さて，定理1と2から，平成17年度の会津大学の問題での極限(5)の関係式は，次のように拡張することができました。

> **系3** $p-[p]=\dfrac{1}{p}$ または $p-[p]=1-\dfrac{1}{p}$ を満たす正の実数 p について，
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi p^n)=0 \tag{31}$$

§6．計算例

§4，§5で考察した正の実数 p について，計算例を示します。今回使用したのは，一部の教科書でも採用されている「十進BASIC for Windows」(http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/) です。

6.1. 小数部分が $\dfrac{1}{p}$ の正の実数 p の計算例

$$x-\frac{1}{x}=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

を満たす正の実数 p を p_1, p_2, p_3, …… とすると,

$$p_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$p_2=1+\sqrt{2}$$

$$p_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

……

となります。以下に数列 $\{p_3^n \mid n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 20\}$ の表を掲載します。偶数乗, 奇数乗の小数部分がそれぞれ 1 および 0 に収束していく様子が見られます。

n	p_3^n
1	3.3027756377319946466
2	10.9083269131959839397
3	36.0277563773199464656
4	118.9915960451558233365
5	393.0025445127874164750
6	1297.9992295835180727615
7	4287.0002332633416347594
8	14158.9999293735429770396
9	46764.0000213839705658781
10	154450.9999935254546746740
11	510117.0000019603345899003
12	1684801.9999994064584443749
13	5564523.0000001797099230248
14	18378370.9999999455882134494
15	60699636.0000000164745633730
16	200477278.9999999950119035684
17	662131473.0000000015102740782
18	2186871697.9999999995427258028
19	7222746567.0000000001384514867
20	23855111398.9999999999580802628

6.2. 小数部分が $1-\dfrac{1}{p}$ の正の実数 p の計算例

$$x-\left(1-\frac{1}{x}\right)=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$$

を満たす正の実数 q を q_2, q_3, q_4…… とすると,

$$q_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$q_3=2+\sqrt{3}$$

$$q_4=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

……

以下に数列 $\{q_4^n \mid n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 20\}$ の表を掲載します。小数部分が単調に 1 に近づいていく様子がわかると思います。

n	q_4^n
1	4.7912878474779200033
2	22.9564392373896000165
3	109.9909083394700800791
4	526.9981024599608003788
5	2524.9996039603339218150
6	12097.9999173417088086962
7	57964.9999827482101216661
8	277726.9999963993417996343
9	1330669.9999992484988765054
10	6375622.9999998431525828927
11	30547444.9999999672640379580
12	146361601.9999999931676068973
13	701260564.9999999985739965287
14	3359941222.9999999997023757460
15	16098445549.9999999999378822013
16	77132286526.9999999999870352605
17	369562987084.9999999999972941013
18	1770682648897.9999999999994352461
19	8483850257404.9999999999998821290
20	40648568638126.9999999999999753989

§7. 整数部分に成り立つ漸化式

今回の定理 1 の証明は, 最初は 2 次方程式の解と係数の関係を使わずに, 帰納的に証明していました。帰納的に証明するとテクニカルで煩雑ですが, 数列 $\{p^n\}$ の整数部分に成り立つ, 漸化式が求められます。結果のみ書いておきます。

> $p-[p]=\dfrac{1}{p}$ を満たす正の実数 p について, 整数部分を $[p]$ で表す。自然数を k として, 次の漸化式が成り立つ。
>
> $$[p^{2k}]=[p][p^{2k-1}]+[p^{2k-2}] \tag{32}$$
>
> $$[p^{2k+1}]=[p]([p^{2k}]+1)+[p^{2k-1}] \tag{33}$$

§8. おわりに

今回扱った実数は, 整数係数の 2 次方程式の解ですが, 例えば, 小数部分が $\dfrac{1}{p^2}$ であるような実数 p

についても数列 $\{p^n\}$ の小数部分が同様に収束していくのではないかと予想できます。例えば，

$$p-\frac{1}{p^2}=1$$

を満たす実数 p は，3次方程式を解いて，

$$p=\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{29}{54}+\frac{\sqrt{93}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{29}{54}-\frac{\sqrt{93}}{18}}$$
$$=1.4655712318767\cdots\cdots$$

となります。紙面の都合上すべてを掲載することはできませんが，小数部分が0または1に近づいていくように見えます。例えば，

$$\cdots\cdots$$
$$p^{20}=2089.96315747421321902951\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$p^{60}=9128846213.000002875938468\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$p^{100}=39874307297033165.00000000958632322\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

となります。これらのことも説明できるようになるのが今後の課題です。

以上，小数部分の極限の振る舞いについて考察してきました。数学IIIでは，数列 $\{r^n\}$ の極限を r の値によって分類しますが，$r>1$ の場合の数列の発散の様子を具体的な例で考えたことはありませんでした。

今回考察した例は，発散する数列の中でも小数部分が消える(正確には0で埋まるか9で埋まる)数列の例です。

数学IIIの授業の雑談のネタとして今後話す機会があればと思っています。ご意見いただければ幸いです。

《参考文献》

〔1〕 2006全国大学入試問題正解　旺文社

(宮城県利府高等学校)