ワールドカップサッカー1次リーグについて

水野（みずの）　隆生（たかお）

§1. はじめに

皆さん，2006年にドイツで行われたサッカーワールドカップはイタリアの優勝で閉幕しましたが，1次リーグの勝ち点表について興味を持っていませんか。前後半90分の試合を行って，勝ったら勝ち点3点，引き分けたら勝ち点1点，負けたら0点となっています。

ここで，次のような問題を考えました。

問題1：3チームでリーグ戦を行ったとき，
(1)　1チームの勝ち点は，何点から何点まであるか。
(2)　3チームの勝ち点表は何通りあるか。

問題2：4チームでリーグ戦を行ったとき，
(1)　1チームの勝ち点は，何点から何点まであるか。
(2)　4チームの勝ち点表は何通りあるか。

解説：2チームで戦ったときは，勝つか，引き分けるか，負けるかであるから，1チームの勝ち点は，3点，1点，0点になり，勝ち点表はどちらかのチームが勝ったとき 3－0……2通り，または，引き分けたときの 1－1……1通りになる。

§2. 問題1について

問題1　(1)　1チームについては，2勝のとき6点，1勝1引き分けのとき4点，1勝1敗のとき3点，2引き分けのとき2点，1引き分け1敗のとき1点，2敗のとき0点になる。

(2)　3チームがリーグ戦をすると，試合数は ${}_3C_2=3$ 通り。それぞれの試合について，一方が勝つ場合，負ける場合，引き分けの場合と3通りの勝敗が考えられるので，$3^3=27$ 通りのケースが考えられます。それらをすべて数えてみると，勝ち点表は7通りになる。

・6－3－0－……6通り
（2勝するチームが3通り×1勝するチームが2通り）
・6－1－1－……3通り
（2勝するチームが3通り）
・4－3－1……6通り
（1勝1引き分けのチームが3通り×1勝のチームが2通り）
・4－2－1……6通り
（1勝1引き分けのチームが3通り×2引き分けのチームが2通り）
・4－4－0……3通り
（1勝1引き分けが2チームで3通り）
・3－3－3……2通り(すべて1勝1敗)
・2－2－2……1通り(すべて引き分け)

§3. オイラーのアイディアを適用

そこで，数え上げるのでなく何か解法がないかを考えてみると，偉大なオイラーが整数の性質を調べるのに多項式(母関数)を使っていることに気がついた。そのアイディアとは，整数 a と b を加えることを累乗 x^a と x^b を掛けることに対応させている。次の多項式を展開してみると，

$$(a^3+a+a^0)\times(a^3+a+a^0)$$
$$=a^6+2a^4+2a^3+a^2+2a+a^0$$

これは，多項式の次数が勝ち点，係数がどんな場合があるかの数を示しています。すなわち，2勝のとき6点，1勝1引き分けのとき4点(どの相手かの2通り)，1勝1敗のとき3点(どの相手かの2通り)，2引き分けのとき2点，1引き分け1敗のとき1点(どの相手かの2通り)，2敗のとき0点になる。

では，(2)の勝ち点表はどんな多項式を考えると良いか。2チームを a，b と表し，a，b の勝ち点を a，b の指数にし，それぞれの場合の数を係数とすると，次の多項式で表せます。

$$a^3b^0+a^1b^1+a^0b^3$$

ここで，a^3b^0 とは，a チームが勝ち点３で，b チームが勝ち点０，その場合の数が１通り。a^1b^1 とは，a チームが勝ち点１で，b チームが勝ち点１，その場合の数が１通り。a^0b^3 とは，a チームが勝ち点０で，b チームが勝ち点３，その場合の数が１通りを意味します。

問題の勝ち点表は，パターンが a，b を区別していないので，a^3b^0 と a^0b^3 を同じとして得ることができる。問題１は

$$(a^3b^0+a^1b^1+a^0b^3)\times(b^3c^0+b^1c^1+b^0c^3)\times(c^3a^0+c^1a^1+c^0a^3)$$

になります。これを展開すると

$$\begin{aligned}&(a^3b^3c^0+a^1b^4c^0+a^0b^6c^0+a^3b^1c^1+a^1b^2c^1\\&\quad+a^0b^4c^1+a^3b^0c^3+a^1b^1c^3+a^0b^3c^3)\\&\quad\times(c^3a^0+c^1a^1+c^0a^3)\\&=a^3b^3c^3+a^1b^4c^3+a^0b^6c^3+a^3b^1c^4+a^1b^2c^4+a^0b^4c^4\\&\quad+a^3b^0c^6+a^1b^1c^6+a^0b^3c^6+a^4b^3c^1+a^2b^4c^1\\&\quad+a^1b^6c^1+a^4b^1c^2+a^2b^2c^2+a^1b^4c^2+a^4b^0c^4\\&\quad+a^2b^1c^4+a^1b^3c^4+a^6b^3c^0+a^4b^4c^0+a^3b^6c^0\\&\quad+a^6b^1c^1+a^4b^2c^1+a^3b^4c^1+a^6b^0c^3+a^4b^1c^3\\&\quad+a^3b^3c^3\end{aligned}$$

そこで，a，b，c の区別をなくして次数に着目して，27 項を数えてみると

・6 ― 3 ― 0 ……６通り
・6 ― 1 ― 1 ……３通り
・4 ― 3 ― 1 ……６通り
・4 ― 2 ― 1 ……６通り
・4 ― 4 ― 0 ……３通り
・3 ― 3 ― 3 ……２通り
・2 ― 2 ― 2 ……１通り

となって，同じ結果になる。

§4. 問題２について

次に同様に，問題２ (1)を考えてみる。

$$\begin{aligned}&(a^3+a+a^0)^3\\&=(a^6+2a^4+2a^3+a^2+2a+a^0)\times(a^3+a+a^0)\\&=a^9+3a^7+3a^6+3a^5+6a^4+4a^3+3a^2+3a+a^0\end{aligned}$$

よって，３勝のとき９点，２勝１引き分けのとき７点，２勝１敗のとき６点，１勝２引き分けのとき５点，１勝１引き分け１敗のとき４点，１勝２敗のとき３点，３引き分けのとき３点，３敗のとき０点になる。

また，(2)は４チームの場合だから，チームを a，b，c，d として，対応する勝ち点表を求める多項式は

$$\begin{aligned}&(a^3b^0+a^1b^1+a^0b^3)\\&\times(a^3c^0+a^1c^1+a^0c^3)\\&\times(a^3d^0+a^1d^1+a^0d^3)\\&\times(b^3c^0+b^1c^1+b^0c^3)\\&\times(b^3d^0+b^1d^1+b^0d^3)\\&\times(c^3d^0+c^1d^1+c^0d^3)\end{aligned}$$

となり，これを展開してから，a，b，c，d の区別をなくして次数に着目して，$3^6=729$ 項を数えてみると求める答えを得る。では，結果を書きます。

「１」　9 ― 6 ― 3 ― 0 ……24 通り
「２」　9 ― 6 ― 1 ― 1 ……12 通り
「３」　9 ― 4 ― 3 ― 1 ……24 通り
「４」　9 ― 4 ― 2 ― 1 ……24 通り
「５」　9 ― 4 ― 4 ― 0 ……12 通り
「６」　9 ― 3 ― 3 ― 3 …… 8 通り
「７」　9 ― 2 ― 2 ― 2 …… 4 通り
以上　１位の勝ち点９のもの７種類　合計108通り
「８」　7 ― 7 ― 3 ― 0 ……12 通り
「９」　7 ― 7 ― 1 ― 1 …… 6 通り
「10」　7 ― 6 ― 4 ― 0 ……24 通り
「11」　7 ― 6 ― 3 ― 1 ……24 通り
「12」　7 ― 6 ― 2 ― 1 ……24 通り
「13」　7 ― 5 ― 4 ― 0 ……24 通り
「14」　7 ― 5 ― 3 ― 1 ……24 通り
「15」　7 ― 5 ― 2 ― 1 ……24 通り
「16」　7 ― 4 ― 4 ― 1 ……36 通り
「17」　7 ― 4 ― 3 ― 3 ……24 通り
「18」　7 ― 4 ― 3 ― 2 ……24 通り
「19」　7 ― 4 ― 3 ― 1 ……24 通り
「20」　7 ― 4 ― 2 ― 2 ……24 通り
「21」　7 ― 3 ― 2 ― 2 ……12 通り
以上　１位の勝ち点７のもの14種類　合計306通り
「22」　6 ― 6 ― 6 ― 0 …… 8 通り
「23」　6 ― 6 ― 4 ― 1 ……24 通り
「24」　6 ― 6 ― 3 ― 3 ……24 通り
「25」　6 ― 5 ― 4 ― 1 ……24 通り
「26」　6 ― 5 ― 2 ― 2 ……12 通り
「27」　6 ― 4 ― 4 ― 3 ……36 通り
「28」　6 ― 4 ― 4 ― 2 ……24 通り
以上　１位の勝ち点６のもの７種類　合計152通り
「29」　5 ― 5 ― 5 ― 0 …… 4 通り
「30」　5 ― 5 ― 4 ― 1 ……24 通り

「31」　5－5－3－2……12 通り
「32」　5－5－3－1……12 通り
「33」　5－5－2－2……12 通り
「34」　5－4－4－3……24 通り
「35」　5－4－4－2……24 通り
「36」　5－4－3－2……24 通り
「37」　5－3－3－2……12 通り
以上　1位の勝ち点5のもの9種類　合計148通り
「38」　4－4－4－4……6通り
「39」　4－4－4－3……8以上
以上　1位の勝ち点4のもの2種類　合計14通り
「40」　3－3－3－3……1通り
以上　1位の勝ち点3のもの1種類　1通り
したがって，全体で　40種類　729通りになる。
参考に，2006年にドイツで行われたサッカーワールドカップの1次リーグの結果を書きます。
Aグループは9-6-3-0　Bグループは7-5-3-1
Cグループは7-7-3-0　Dグループは9-4-2-1
Eグループは7-6-3-1　Fグループは9-4-2-1
Gグループは7-5-4-0　Hグループは9-6-1-1
だった。

§5. おわりに

最後に，5チームでリーグ戦を行った場合は全体で $3^{10}=59{,}049$ 通り，355種類のパターンがあり，6チームの場合は全体で $3^{15}=14{,}348{,}907$ 通り，3678種類にも膨れ上がっていきます。詳しくは，インターネットサイト「水の流れ」の応募問題 http://www2.ocn.ne.jp./~mizuryu/ をご覧ください。

《参考文献》

〔1〕 数学の知性　W. ダンハム著　中村由子訳　現代数学社
〔2〕 オイラーの無限解析　レオンハルト・オイラー著　高瀬正仁訳　海鳴社

(岐阜県立大垣南高等学校)