ある有限数列の総和法について

熊野（くまの）　充博（みつひろ）

§1. はじめに

まず，基本的な事柄をとりあげる。

【定理A】 漸化式 $a_{n+1}=ra_n+f(n)\cdots(*)$
の解は次の式で与えられる。(ただし，r は0でない定数とする。)

(1) $(*)$を，$r^{-(n+1)}a_{n+1}=r^{-n}a_n+r^{-(n+1)}f(n)$ と変形する。数列 $\{r^{-n}a_n\}$ は階差数列の公式から，$n\geqq 2$ のとき，

$$r^{-n}a_n=r^{-1}a_1+\sum_{k=1}^{n-1}r^{-(k+1)}f(k)$$

と表されるので，結局

$$a_n=a_1r^{n-1}+r^n\cdot\sum_{k=1}^{n-1}r^{-(k+1)}f(k)\quad\cdots\cdots①$$

と書ける。

(2) $(*)$の特殊解を $\phi(n)$ とすると，$a_{n+1}-\phi(n+1)=r\{a_n-\phi(n)\}$ と書けるので，等比数列の一般項の公式から，

$$a_n=\phi(n)+\{a_1-\phi(1)\}\cdot r^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

と表される([1]など参照)。

さて，これ以外にも解法はあるが，上の①②のいずれが適切であろうか。①の場合，一般解の式が閉じた式で書かれているものの，実際に計算しようとすると，$\sum_{k=1}^{n-1}r^{-(k+1)}f(k)$ の部分の計算が容易ではない。また，②では，特殊解をどうやって見つけるか，という問題がある。

ところで，この両者を見比べているうちに，発想を逆転(?)させて，次の公式が得られることに気づいた。

【定理B】 下記のタイプの有限数列の総和法は次の通り。
漸化式 $a_{n+1}=ra_n+f(n)$ の任意の解を $\phi_n(r)$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\cdot r^{k-1}=r^{n-1}\cdot\phi_{n+1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\phi_1\left(\frac{1}{r}\right)\cdots③$$

と書ける。
(※) $\phi_n(r)$ は初項にも依存するので $\phi_n(a_1,\ r)$ と書くべきであるが，煩雑になるので便宜上，$\phi_n(r)$ と書くことにする。

【定理Bの証明】 仮定により，
$\phi_{n+1}(r)=r\cdot\phi_n(r)+f(n)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\cdot r^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\{\phi_{k+1}(r)-r\cdot\phi_k(r)\}r^{k-1}$$

漸化式において $\phi_{k+1}(r)-r\phi_k(r)=f(k)$ と変形すれば分かるように，左辺は r に無関係である。
よって，$r\longrightarrow\dfrac{1}{r}$ なる変換を行うと，上式は

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\cdot r^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\phi_{k+1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\phi_k\left(\frac{1}{r}\right)\right\}r^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{r^{k-1}\cdot\phi_{k+1}\left(\frac{1}{r}\right)-r^{k-2}\cdot\phi_k\left(\frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$=r^{n-1}\cdot\phi_{n+1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\phi_1\left(\frac{1}{r}\right)\qquad■$$

それでは早速，定理Bの効用(?)を確かめてみよう。

§2. 定理Bの応用例(以下，定数 $r\neq 1$ とする。)

(例1) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot r^{k-1}=1+2r+3r^2+\cdots\cdots+nr^{n-1}$ を求めよ。

[解] 通常，(ア)等比数列の和 $1+r+r^2+r^3\cdots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$ の両辺を r で微分する，あるいは，(イ)和を S_n とおいて，$S_n-r\cdot S_n$ を計算する，というのが定番(?)のやり方である。

さて，定理Bを使うと次のようになる。

まず，漸化式 $a_{n+1}=ra_n+n$ の特殊解を求める(求め方は[1]等を参考のこと)。視察により，$a_n=bn+c$ (b，c は n に無関係な定数)とおくと $b(n+1)+c=r(bn+c)+n$ より $b=rb+1$，$b+c=rc$ を得る。これを解いて

$$b=\frac{1}{1-r},\quad c=-\frac{1}{(1-r)^2}$$

そこで，この特殊解を $\phi_n(r)$ とおく。

すなわち　$\phi_n(r)=\dfrac{(n-1)-nr}{(1-r)^2}$ と書けるから，定理Bを用いて，

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot r^{k-1}=r^{n-1}\cdot\phi_{n+1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\phi_1\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$=r^{n-1}\cdot\frac{nr^2-(n+1)r}{(1-r)^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{r}{(1-r)^2}$$
$$=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

と比較的(？)楽な計算で求められる。

（例２）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot r^{k-1}=1+2^2r+3^2r^2+\cdots\cdots+n^2r^{n-1}$ を求めよ。

［解］　まず，漸化式 $a_{n+1}=ra_n+n^2$ の特殊解を求める。視察により，$a_n=bn^2+cn+d$ とおく。漸化式に代入すると，結局，

$$b=br+1,\ 2b+c=rc,\ b+c+d=rd$$

を得るから，この連立方程式を解くと

$$b=\frac{1}{1-r},\quad c=-\frac{2}{(1-r)^2},\quad d=\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

したがって，特殊解 $\phi_n(r)$ は

$$\phi_n(r)=\frac{n^2}{1-r}-\frac{2n^2}{(1-r)^2}+\frac{1+r}{(1-r)^3}$$
$$=\frac{(n-1)^2-(2n^3+2n-1)r+n^2r^2}{(1-r)^3}$$

よって，(例１)と同様に

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot r^{k-1}=r^{n-1}\cdot\phi_{n+1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\phi_1\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$=r^{n-1}\cdot\frac{r[(n+1)^2-\{2n(n+1)-1\}r+n^2r^2]}{(r-1)^3}$$
$$-\frac{1}{r}\cdot\frac{r(1+r)}{(r-1)^3}$$
$$=\frac{n^2r^{n+2}-\{2n(n+1)-1\}r^{n+1}+(n+1)r^2-r-1}{(r-1)^3}$$
$$=\frac{1+r-(n+1)^2r^n+(2n^2+2n-1)r^{n+1}-n^2r^{n+2}}{(1-r)^3}$$

(※)公式集［２］などに上記の解がのっている。

（例３）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3\cdot r^{k-1}=1+2^3r+3^3r^2+\cdots\cdots+n^3r^{n-1}$ を求めよ。

［解］　前述の(ア)(イ)の方法ではかなり煩雑な計算になる(と思う)。

まず，漸化式 $a_{n+1}=ra_n+n^3$ の特殊解を求める。視察により $a_n=bn^3+cn^2+dn+e$ とおいてみる。漸化式に代入すると，結局 $b=br+1$，$3b+c=cr$，$3b+2c+d=dr$，$b+c+d+e=er$ を得るから，この連立方程式を解いて，未定係数 b，c，d，e の値は次のようになる。

$$b=\frac{1}{1-r},\quad c=-\frac{3}{(1-r)^2},\quad d=\frac{3(1+r)}{(1-r)^3},$$
$$e=-\frac{1+4r+r^2}{(1-r)^4}$$

したがって，特殊解 $\phi_n(r)$ は

$$\phi_n(r)=\frac{n^3}{1-r}-\frac{3n^2}{(1-r)^2}+\frac{3n(1+r)}{(1-r)^3}-\frac{1+4r+r^2}{(1-r)^4}$$
$$=\frac{(n-1)^3-(3n^3-6n^2+4)r+(3n^3-3n^2-3n-1)r^2-n^3r^3}{(1-r)^4}$$

よって，(例１)と同様に

$$\sum_{k=1}^{n}k^3\cdot r^{k-1}=r^{n-1}\cdot\phi_{n+1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\phi_1\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$=r^{n-1}\cdot\frac{r}{(1-r)^4}\cdot(\#)-\frac{1}{r}\cdot\frac{r}{(1-r)^4}(-r^2-4r-1)$$
$$=\frac{(\#\#)}{(1-r)^4}$$

ここで

$$(\#)=n^3r^3-(3n^3+3n^2-3n+1)r^2$$
$$+(3n^3+6n^2-4)r-(n+1)^3$$
$$(\#\#)=1+4r+r^2-(n+1)^3r^n$$
$$+(3n^3+6n^2-4)r^{n+1}$$
$$-(3n^3+3n^2-3n+1)r^{n+2}+n^3r^{n+3}$$

である。

【注】　代入計算が一見，煩雑に見えるが
$3n^3-6n^2+4=3n\cdot n(n-2)+4$,
$3n^3-3n^2-3n-1=3n\cdot n(n-1)-3(n-1)-4$
などと変形しておけば比較的，簡単にすむ。公式集［２］に上記の解がのっている。

《参考文献》

〔１〕　横山政道　「漸化式 $a_{n+1}=ka_n+f(n)$ の一般項を求める統一的解法について」数研通信 No. 53　2003年８月　p.15

〔２〕　室谷義昭・訳(原著はロシア語)　新数学公式集Ⅰ(初等関数)　丸善(株)　1991年　p.603

(広島県立沼南高等学校)