正多角形の辺および対角線の長さの総和

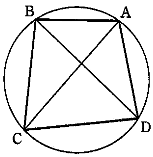
―トレミーの定理の力―

大塚（おおつか） 秀幸（ひでゆき）

§1. トレミーの定理

本稿は正多角形の１つの性質について論ずるが，そこでは「トレミーの定理」が議論の中心になる。この定理は，高校数学ではあまり馴染みがないが，初等幾何では基本的かつ重要な定理である。
まずは，この定理とその基本的な使い方を示そう。

【トレミーの定理】
右の図のように，円に内接する四角形 ABCD の辺および対角線に対し
AB･CD＋BC･AD
＝AC･BD



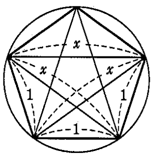
この定理の証明は，幾何の書物にゆずることにして，本稿はこれを認めた上で議論する。以下に，トレミーの定理を用いる簡単な例を示そう。

（例１）　１辺が１の正五角形の対角線の長さ x は，トレミーの定理より

$$1\times x+1\times 1=x^2$$

これを解くと

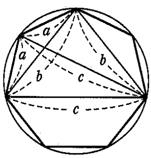
$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



この例は通常，相似な三角形をみつけ対応する辺を比較することで方程式を作るのだが，上の方法だと，一発で必要な方程式が得られる。

（例２）　正七角形の１辺の長さを a，２種類ある対角線の長さを b，c とすると

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$



（証明）　トレミーの定理より $ab+ac=bc$
両辺を abc で割ると上の結果を得る。

この性質はよく知られているとても美しい結果である。この性質をトレミーの定理を使わずに証明しようとすると非常に面倒になる。

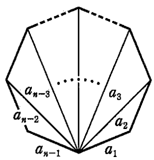
以上からわかるように，この定理は正多角形に対して非常に効果的な役割を果たすことがある。

§2. 正多角形の辺および対角線の長さの総和

一般の正多角形に対し，辺および対角線の長さの総和に関する以下の定理を証明しよう。

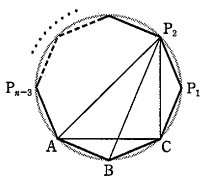
【定理】　１辺が α の正 n 角形の辺および対角線の長さの総和は，最短の対角線の長さを β とすると $\dfrac{\alpha^2 n}{2\alpha-\beta}$

（証明）　１つの頂点に対し右の図のように対角線の長さを a_1，a_2，a_3，……，a_{n-1} とする。このとき，$a_1=a_n=1$，$a_i=a_{n-i}$ であることに注意する。



次に，右下の図のように n 個の頂点を A，B，C，P_1，P_2，……，P_{n-3} とする。
すると，トレミーの定理より，

四角形 $ABCP_1$ に対し
$a_1a_1+a_1a_3=a_2a_2$
四角形 $ABCP_2$ に対し
$a_1a_2+a_1a_4=a_2a_3$
四角形 $ABCP_3$ に対し
$a_1a_3+a_1a_5=a_2a_4$
……
四角形 $ABCP_{n-3}$ に対し
$a_1a_{n-3}+a_1a_{n-1}=a_2a_{n-2}$



辺々加えると

$$a_1\left(a_1+a_2+a_{n-2}+a_{n-1}+2\sum_{i=3}^{n-3}a_i\right)=a_2\sum_{i=2}^{n-2}a_i$$

両辺に $a_1(a_1+a_2+a_{n-2}+a_{n-1})=2a_1^2+2a_1a_2$

を加えて

$$2a_1\sum_{i=1}^{n-1}a_i=2a_1^2+a_2\sum_{i=1}^{n-1}a_i$$

$$(2a_1-a_2)\sum_{i=1}^{n-1}a_i=2a_1^2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_i=\frac{2a_1^2}{2a_1-a_2}\ (\because\ 0<a_2<2a_1) \quad \cdots\cdots①$$

これは，1つの頂点から出る辺と対角線の長さの和を意味する。

また，頂点が n 個あるので①式を n 倍して

$$\frac{2a_1^2n}{2a_1-a_2} \cdots\cdots②$$

これは各辺，各対角線2回ずつを考えに入れているので，1辺が1の正 n 角形の辺および対角線の長さの総和は，

②式÷2 より $\dfrac{a_1^2n}{2a_1-a_2}$（ここで，a_1 は辺の長さ，a_2 は最短の対角線の長さ）

特に，1辺が1であれば，$\dfrac{n}{2-\beta}$ となる。 ■

§3. おわりに

幾何の美しさに魅了される人は多いが，逆に幾何を毛嫌いする人もまた多い。おそらく，日本の数学教育が幾何を軽視していること，たくさんの時間がさけないことがその理由だろう。テストとは別にして絵画などの美術品のように，多くの素晴らしい幾何の定理を鑑賞する機会があると，幾何に対する捉え方が変わると私は思うのだが。

（東京都　元文教大学付属高等学校）