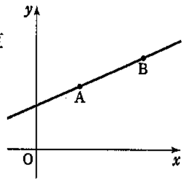
3 点を通る放物線の方程式を連立方程式で解かない方法はないか

高橋（たかはし） 敏雄（としお）

§1．直線の傾き

2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を通る直線を考える。この直線の傾きは，



$x_1 \neq x_2$ のとき $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

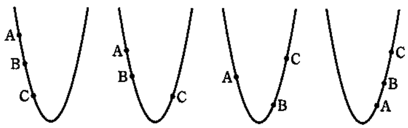
$x_1=x_2$ のとき 傾きはない $(\pm\infty)$ で表される。

§2．2 次関数について

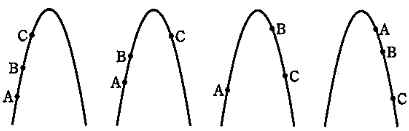
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……(＊) のグラフが，異なる 3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を通るとき，2 次関数(＊)は如何なるものであろうか。普通この問題は，ここに挙げるほどのものではない。3 点の座標を(＊)に代入することによって，3 元連立方程式を作り，それを解くことですべては終わる。ではなぜ取り扱ったのか。理由は至って簡単である。この 3 元連立方程式を解くというのを嫌ったからである。

さて，放物線上の 3 点の位置には，下に凸，上に凸の場合それぞれ 4 通りがある。

(I) 下に凸

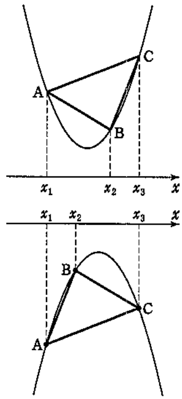


(II) 上に凸



(III) a と傾きの関係

a とは，2 つの傾きの平均変化率である。



BC の傾きを $m_1=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$

AC の傾きを $m_2=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

AB の傾きを $m_3=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

とおくと，次のことが成り立つ。

> (i) 下に凸
> $\iff m_1>m_2>m_3$
> (ii) 上に凸
> $\iff m_1<m_2<m_3$

証明 (i)を示す。

$$m_1=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{ax_3{}^2+bx_3+c-(ax_2{}^2+bx_2+c)}{x_3-x_2}$$

$$=\frac{a(x_3{}^2-x_2{}^2)+b(x_3-x_2)}{x_3-x_2}$$

$$=a(x_3+x_2)+b \qquad \cdots\cdots ①$$

同様にして，

$$m_2=a(x_3+x_1)+b \qquad \cdots\cdots ②$$

$$m_3=a(x_1+x_2)+b \qquad \cdots\cdots ③$$

①，②，③により，$m_1-m_2=a(x_2-x_1)$，$m_2-m_3=a(x_3-x_2)$ となる。

$x_2-x_1>0$，$x_3-x_2>0$ から

下に凸 $\iff a>0$

$\iff m_1-m_2>0$ かつ $m_2-m_3>0$

$\iff m_1>m_2$ かつ $m_2>m_3$

$\iff m_1>m_2>m_3$

(ii)も同様にして示される。 ……終

このことにより，

$$a=\frac{m_1-m_2}{x_2-x_1}=\frac{m_2-m_3}{x_3-x_2}=\frac{m_3-m_1}{x_1-x_3}$$
が成り立つ。

したがって，a は２つの傾きの平均変化率で求めることができる。

また，b の値は，$y'=2ax+b$ より，この式に $x=0$ を代入することにより求めることができる。すなわち，(＊)と y 軸との交点における接線の傾きとなる。c の値は，この交点の y 切片ということになる。３点から a の値は上記の公式で求められるが，b と c はそう簡単には求めることができない。

(Ⅳ)　a と △ABC の面積の関係

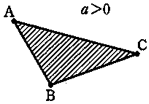
> △ABC の面積を S とおくと
> $$S=\frac{1}{2}|a|(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$$

証明

$$a(x_2-x_1)=m_1-m_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$
$$=\frac{(y_3-y_2)(x_3-x_1)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}$$
$$\therefore\quad a(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)$$
$$=(y_3-y_2)(x_3-x_1)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)\quad\cdots\cdots④$$

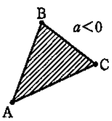
$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$，$\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2,\ y_3-y_2)$ とおくと，
$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=(y_3-y_2)(x_3-x_1)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)$$
である。

$a>0$ のとき，$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}>0$
$a<0$ のとき，$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}<0$
よって，④の両辺の符号は一致する。



$$\frac{1}{2}a(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)$$
$$=\frac{1}{2}\{(y_3-y_2)(x_3-x_1)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)\}\quad\cdots\cdots⑤$$

⑤の両辺の絶対値で，右辺は △ABC の面積 S となるから，
$$S=\frac{1}{2}|a|(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)\quad\cdots\cdots終$$



§３．点および関数の平行移動

x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動することにより，

点 $(a,\ b)$ は点 $(a+p,\ b+q)$ に移る。

関数 $y=f(x)$ が，関数 $y=f(x-p)+q$ に移ることは知っている。

そこで，３点を通る問題でなるべく連立方程式で解かない方法はないかということで，次のような解法を考えた。例で説明しよう。

> (例)　３点 $(1,\ -1)$，$(-2,\ 17)$，$(3,\ 7)$ を通る２次関数を決定せよ。

解答　(1)　a の決定
$$a=\frac{\frac{7-(-1)}{3-1}-\frac{17-(-1)}{-2-1}}{3-(-2)}=\frac{4+6}{5}=\frac{10}{5}=2$$

(2)　２次関数の決定

３点のどれかの y 座標が０になるように平行移動をする。この場合は，y 軸方向に１だけ平行移動させる。

３点 $(1,\ -1)$，$(-2,\ 17)$，$(3,\ 7)$ はそれぞれ３点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 18)$，$(3,\ 8)$ に移る。

したがって，求める２次関数は
$y=2(x-1)(x-\alpha)$ の形となる。これが点 $(3,\ 8)$ を通るから，$8=2(3-1)(3-\alpha)$

$\therefore\quad 8=2\cdot2\cdot(3-\alpha)\quad 3-\alpha=2$　よって　$\alpha=1$

$\therefore\quad y=2(x-1)(x-1)=2(x-1)^2$

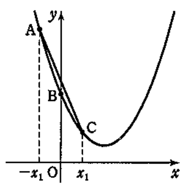
これを，再度 y 軸方向に -1 平行移動すると求める２次関数に到達する。

求める２次関数は
$$y=2(x-1)^2-1=2(x^2-2x+1)-1$$
$$=2x^2-4x+1\quad\cdots\cdots答$$

§４．特殊な例

［１］　３点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(-x_1,\ y_3)$ を通る場合

§２の(Ⅲ)の②より
$m_2=a(-x_1+x_1)+b=b$
これは直線 AC の傾きと等しい(＊)の接線の接点は，(＊)と y 軸と交わる交点Bとなるため，$b=m_2$



> (例)　３点 $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通る２次関数を決定せよ。

解答　$$a=\frac{\frac{0-9}{2-(-1)}-\frac{-1-9}{1-(-1)}}{2-1}=-3+5=2$$

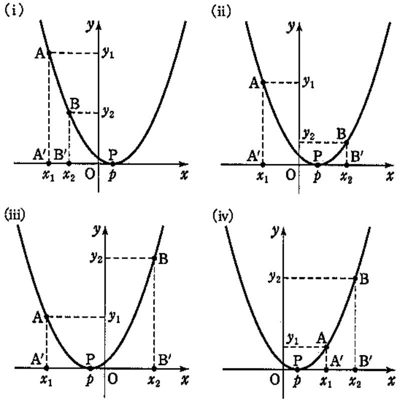
$b=\dfrac{-1-9}{1-(-1)}=-5$　点 $(2,\ 0)$ を通るから，

$y=2(x-2)(x-a)=2x^2-(4+2a)x+4a$

$-(4+2a)=-5$ より　$a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad y=2x^2-5x+2$ ……答

［2］ 頂点が x 軸上にある場合



このときの 2 次関数は $y=a(x-p)^2$ で表される。2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を通るから

$y_1=a(x_1-p)^2,\quad y_2=a(x_2-p)^2$

(i)，(ii)，(iii)，(iv)のいずれにおいても

$A'P:B'P=|x_1-p|:|x_2-p|$

ところで，$AA'=|y_1|=|a(x_1-p)^2|=|a||x_1-p|^2$

$BB'=|y_2|=|a(x_2-p)^2|=|a||x_2-p|^2$

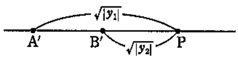
$\therefore\quad AA':BB'=|x_1-p|^2:|x_2-p|^2=|y_1|:|y_2|$

$\therefore\quad A'P:B'P=\sqrt{AA'}:\sqrt{BB'}=\sqrt{|y_1|}:\sqrt{|y_2|}$

が成り立つ。

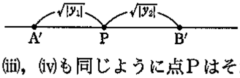
よって，この点 $P(p,\ 0)$ は，線分 $A'B'$ を $\sqrt{|y_1|}:\sqrt{|y_2|}$ に内分 (外分) する点になる。このようにして p の値を求めていく。a の値は，$y_1=a(x_1-p)^2$ か $y_2=a(x_2-p)^2$ に代入することから求めることができる。

(i)の場合



点Pは外分する点

(ii)の場合



点Pは内分する点

(iii)，(iv)も同じように点Pはそれぞれ内分，外分する点である。

> (例)　グラフの頂点が x 軸上にあり，2 点 $A(1,\ 1)$，$B(2,\ 4)$ を通る 2 次関数を求めよ。

解答　求める 2 次関数を $y=a(x-p)^2$ とする。

$A'(1,\ 0)$，$B'(2,\ 0)$ とおく。

$A'P:B'P=\sqrt{1}:\sqrt{4}=1:2$ であるから

$p=\dfrac{1\cdot 2+1\cdot 2}{1+2}=\dfrac{4}{3}$

または $p=\dfrac{1\cdot(-2)+1\cdot 2}{1-2}=\dfrac{0}{-1}=0$

$y=a\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2$ のとき，Aの点を通るから

$1=a\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\qquad\therefore\quad a=9$

$y=ax^2$ のとき，点Aを通るから

$1=a\cdot 1^2\qquad\therefore\quad a=1$

以上のことから

$y=x^2,\ y=9\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2$ ……答

この問題は生徒の知識を持ってさせるのに，説明に苦労をする問題である。最もこの解き方がよいとも言えない。内分・外分の知識が必要であるのは言うまでもない。ただ，このような別解もあるということである。

§5．おわりに

2 次関数の決定は，3 つのパターンがある。すなわち

(1)　一般形　$y=ax^2+bx+c$

(2)　基本形　$y=a(x-p)^2+q$

(3)　分離形　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

で完全に解ける。しかし，冒頭で述べたように，生徒と共に解いていて(1)だけはどうしても，連立方程式で解くのが厄介である。これが今回の発端であった。しかし，連立方程式は避けられたが，もちろんこの方法が良かったかは，甚だ疑問である。読者のご批判を仰ぎたい。

(長崎県立諫早東高等学校)