パスカルの三角形のある領域における逆数和

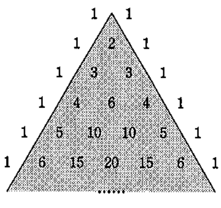
大塚　秀幸（おおつか　ひでゆき）

§1．はじめに

パスカルの三角形に登場する全ての数についての逆数和を考えてみよう。このとき，無数の1を含むので逆数和は無限大となる。それでは，領域を制限したときはどのようになるだろうか。ここでは，2つの部分領域について議論する。

§2．ある領域における逆数和（その1）

パスカルの三角形における以下の領域での逆数和はどのようになるだろうか。ここで，この領域を「領域A」と呼ぶことにしよう。



すると，目的の逆数和は次のように評価される。

領域Aでの逆数和

$$>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots$$

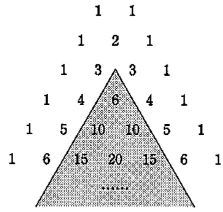
$$>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots=\infty$$

よって，この領域での逆数和は無限大となる。

§3．ある領域における逆数和（その2）

次に，以下のような「領域B」での逆数和について考えてみよう。



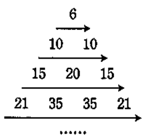
領域Bにおける n 段目までの逆数和

100 段目まで	1.45938
200 段目まで	1.47985
500 段目まで	1.49198
1000 段目まで	1.49599

領域Bのはじまる上から4段目から n 段目までを計算しその近似値を示したものが上記右側の表である。そして，ここから「領域Bでの逆数和が1.5」になると予想できる。この予想について検証してみよう。

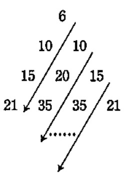
まず，領域Bでの逆数和を表す式を考える。「正項級数は交換律・結合律が成り立つ」ことが知られているためいろいろなタイプの式が考えられるが，ここでは，自然な式の構成として以下の2つの和のとり方に着目する。

〈和のとり方1〉　※上記の近似値はこの方法



$$\Rightarrow \sum_{n=4}^{\infty}\left(\sum_{i=2}^{n-2}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_i}\right) \qquad \cdots\cdots①$$

〈和のとり方2〉



$$\Rightarrow \sum_{n=4}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{{}_i\mathrm{C}_{n-2}}\right) \qquad \cdots\cdots②$$

〈和のとり方１〉は最も自然な方法であるが①式の $\sum_{i=2}^{n-2}\frac{1}{{}_nC_i}$ の部分は n をつかった簡単な式で表せそうにないので，この式は避けたい。それに対し，②式における $\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{{}_iC_{n-2}}$ の部分は，後で示すようにシンプルな表現が可能である。そこで，②式を使ってその結果が $\frac{3}{2}$ であることを次に証明する。

（定理）　パスカルの三角形の領域Ｂの逆数和は $\frac{3}{2}$ になる。

すなわち　$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{{}_iC_{n-2}}\right)=\frac{3}{2}$

（証明）

$$\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{{}_iC_{n-2}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{{}_{j+n}C_{n-2}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n-2)!(j+2)!}{(j+n)!}$$

$$=(n-2)!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+3)(j+4)\cdots\cdots(j+n)}$$

$$=(n-2)!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n-3}\left(\frac{1}{(j+3)(j+4)\cdots\cdots(j+n-1)}-\frac{1}{(j+4)(j+5)\cdots\cdots(j+n)}\right)$$

$$=\frac{(n-2)!}{n-3}\times\left\{\left(\frac{1}{3\cdot4\cdots\cdots(n-1)}-\cancel{\frac{1}{4\cdot5\cdots\cdots n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4\cdot5\cdots\cdots n}}-\cancel{\frac{1}{5\cdot6\cdots\cdots(n+1)}}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{(n-2)!}{n-3}\times\frac{1}{3\cdot4\cdots\cdots(n-1)}$$

$$=\frac{(n-2)!}{n-3}\times\frac{2}{(n-1)!}=\frac{2}{(n-3)(n-1)}$$

したがって，

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{{}_iC_{n-2}}\right)=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2}{(n-3)(n-1)}$$

$$=\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

§４．おわりに

今回はパスカルの三角形からきれいな結論を引き出すことができた。以前もパスカルの三角形からある定理を導いているが，いずれにしても素朴な数字の列から意外なほど美しい関係が現れているのだ。もしかしたら，まだ多くの神秘的な定理が潜んでいるのかもしれない。

（東京都　元文教大学付属高等学校）