$\begin{cases} \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2 \\ \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\sin\theta=x_1y_2-x_2y_1 \end{cases}$

森島（もりしま）　充（みつる）

§0　はじめに

xy 平面において原点Oおよび原点と異なる2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ について，Oを中心として直線OAを直線OBまで回転させたときの一般角を θ とするとき，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2 \\ \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\sin\theta=x_1y_2-x_2y_1 \end{cases}$$

大阪大学の入試問題(2003年，文系，前期)がヒントとなって，θ を一般角とすることで上記の関係式が統一的に整理して書けることに気がつきました。以下その証明をいくつか考えてみましたが，どれも2つの式が同時に得られる点に面白さを感じます。

§1　複素数を利用した証明(1)

(証明)

$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1}&=\frac{x_2+y_2i}{x_1+y_1i}\\&=\frac{(x_2+y_2i)(x_1-y_1i)}{|z_1|^2}\\&=\frac{1}{|z_1|^2}\{x_1x_2+y_1y_2+(x_1y_2-x_2y_1)i\}\end{aligned}$$

一方

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{|z_2|}{|z_1|}(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \cdots\cdots①$$

したがって，実部，虚部を比べることによって

$$\begin{cases} |z_1||z_2|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2 \\ |z_1||z_2|\sin\theta=x_1y_2-x_2y_1 \end{cases}$$

という式が導けます。

(証明終り)

最初に考えた証明です。旧数学Bの教材にうってつけだと思ったのですが，複素数平面が無くなった今となってはいたしかたありません。

§2　加法定理を利用した証明

§1の①では $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\arg z_2-\arg z_1$ という性質が使われていますが，その証明には普通，加法定理が用いられます。では加法定理からもう一度関係式の証明をしてみましょう。

(証明)

$(x_1,\ y_1)=(r_1\cos\alpha,\ r_1\sin\alpha)$

$(x_2,\ y_2)=(r_2\cos\beta,\ r_2\sin\beta)$

とおくと

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos(\beta-\alpha)\\&=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha\\&=\frac{x_2}{r_2}\times\frac{x_1}{r_1}+\frac{y_2}{r_2}\times\frac{y_1}{r_1}\\&=\frac{1}{r_1r_2}(x_1x_2+y_1y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sin(\beta-\alpha)\\&=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha\\&=\frac{y_2}{r_2}\times\frac{x_1}{r_1}-\frac{x_2}{r_2}\times\frac{y_1}{r_1}\\&=\frac{1}{r_1r_2}(x_1y_2-x_2y_1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} r_1r_2\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2 \\ r_1r_2\sin\theta=x_1y_2-x_2y_1 \end{cases}$$

となります。

(証明終り)

§3　回転移動を利用した証明

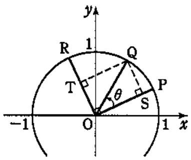
加法定理の証明にはさまざまなものがありますが，私はベクトルを用いて平面上の回転移動の公式を導きながら証明する方法が最も好きです。今度はその方向から考えてみましょう。

（証明）

2点 $P(X_1,\ Y_1)$，$Q(X_2,\ Y_2)$を

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$$



を満たす点とします。

さらに，点 $R(X_3,\ Y_3)$ をOを中心としてPを90°回転させた点とします。

このとき，

$$(X_3,\ Y_3)=(-Y_1,\ X_1) \quad \cdots\cdots②$$

となります。次に，Qから直線OP，OQに下した垂線の足をS，Tとすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT}\\&=\cos\theta\,\overrightarrow{OP}+\sin\theta\,\overrightarrow{OR}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}(X_2,\ Y_2)&=\cos\theta(X_1,\ Y_1)+\sin\theta(X_3,\ Y_3)\\&=\cos\theta(X_1,\ Y_1)+\sin\theta(-Y_1,\ X_1)\\&=(X_1\cos\theta-Y_1\sin\theta,\ X_1\sin\theta+Y_1\cos\theta)\end{aligned}$$

これは回転移動の公式です。これを $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の連立方程式

$$\begin{cases}X_1\cos\theta-Y_1\sin\theta=X_2\\Y_1\cos\theta+X_1\sin\theta=Y_2\end{cases}$$

と見て，$X_1^2+Y_1^2=1$ を利用して解くと

$$\begin{cases}\cos\theta=X_1X_2+Y_1Y_2\\\sin\theta=X_1Y_2-X_2Y_1\end{cases}$$

となります。

さて，点P，Qの定め方から

$$(X_1,\ Y_1)=\left(\frac{x_1}{|\overrightarrow{OA}|},\ \frac{y_1}{|\overrightarrow{OA}|}\right)$$

$$(X_2,\ Y_2)=\left(\frac{x_2}{|\overrightarrow{OB}|},\ \frac{y_2}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$$

です。よって

$$\begin{cases}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2\\|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=x_1y_2-x_2y_1\end{cases}$$

（証明終り）

ベクトルを用いているので，任意の θ について常に成り立っている点に注意して下さい。

§4　複素数を利用した証明(2)

§1の①は加法定理を利用していると考えられるので，加法定理を用いない証明を追加しましょう。

（①の証明）

$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$ に対して

$$w_1=\frac{z_1}{|z_1|},\quad w_2=\frac{z_2}{|z_2|},\quad w_3=iw_1$$

と定めます。このとき，$w_1=a+bi$ ならば

$$w_3=i(a+bi)=-b+ai$$

なので，複素数平面上で w_3 はOを中心として w_1 を90°回転させた点を表しています。

したがって，§3の図と同様にして

$$\begin{aligned}w_2&=\cos\theta\cdot w_1+\sin\theta\cdot w_3\\&=\cos\theta\cdot w_1+\sin\theta\cdot iw_1\\&=w_1(\cos\theta+i\sin\theta)\end{aligned}$$

よって

$$\frac{z_2}{|z_2|}=\frac{z_1}{|z_1|}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{|z_2|}{|z_1|}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

（①の証明終り）

かつて「加法定理を証明せよ」という入試問題が話題となった事がありますが，出版された解答例の中に「安易に複素数を用いるのは危険である」といった主旨の記述がありました。もし，上記のような所までさかのぼることが出来れば，答案として問題ないように思います。

§5　補足

§4は§3の前半とよく似ています。これは等式②が行列を用いて

$$\begin{pmatrix}X_3\\Y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}$$

と書けること，そしてこれが虚数単位の行列表現になっている事を考えれば当然なのかもしれません。そしてさらに，②によって反時計回りという回転の方向を定義しているのだと考えると，納得できる気がします。

複素数の積の性質と加法定理，回転移動の公式は同値ですが，それぞれ独立に証明できます。しかし，いずれも回転という事柄を含んでいて，そのどれからも今回取り上げた2つの関係式が同時に導けるのは興味深いことです。ベクトルの授業で内積や平行条件，面積の公式，もしくは外積といったものを指導する前に，この関係式を「回転角を決定する公式」として紹介する事も意味があるかもしれません。

（東京都立国立高等学校）