数研通信 No.54 を読んで

片岡(かたおか)　宏信(ひろのぶ)

§1. はじめに

数研通信 No.54，p.14 に

「分数式 $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$ の値は整数」

というタイトルで，${}_nC_r$ の値が整数になる証明が与えられていた。この問題については，私も以前気にして，証明を考えていたが，数研通信に掲載されていたものとは，少し異なるので投稿してみた。

§2. 証明

$$ {}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!} $$
$$ =\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \quad (1) $$

であるので，${}_nC_r$ が整数になる問題は，次のように書き換えられる。

n 個の連続する整数の積は $n!$ で割り切れる。

この問題について，数学的帰納法により証明を与える。

{I}　1個の連続する整数は $1!$ で割り切れるので，$n=1$ のとき成り立つ。

{II}　$n=k$（k は自然数）のとき成り立つと仮定すると，

a を任意の整数，l_i を適当な整数として

$$ (a+1)(a+2)\cdots(a+k)=k!\times l_1 \quad (2) $$

と書ける。これより

$$ (a+1)(a+2)\cdots(a+k+1)=(k+1)!\times l_2 \quad (3) $$

が成り立つことを示す。

{1}　$a=0$ のとき，

$$ 1\times2\cdots(k+1)=(k+1)! $$

となり(3)が成り立つ。

{2}　b，m を自然数として $a=b-1$ のとき，(3)が成り立つと仮定すると，

$$ b(b+1)\cdots(b+k)=(k+1)!\times m \quad (4) $$

$a=b$ のとき，

$$ (b+1)\cdots(b+k)(b+k+1)-b(b+1)\cdots(b+k) $$
$$ =(b+1)\cdots(b+k)(b+k+1-b) $$

ここで(2)より

$$ =k!\times l_3\times(k+1) $$
$$ =(k+1)!\times l_3 \quad (5) $$

よって

$$ (b+1)\cdots(b+k+1)=(k+1)!\times(l_3+m) \quad (6) $$

が成り立つ。したがって，{1}{2}より，任意の a について(3)が成り立つことが示された。

したがって{I}{II}より，n 個の連続する整数の積は $n!$ で割り切れることが示された。

よって，${}_nC_r$ は整数になる。

§3. ${}_nC_r$ の拡張

ところで，${}_nC_r$ の n や r が自然数でなくなったときを考えてみた。

(1)より，形式的に x，y を有理数として，

$$ {}_{x+y}C_x=\frac{(x+y)!}{x!y!}=\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} \quad (7) $$

とできる。ここで，$\Gamma(x)$ はガンマ関数で，

$$ \Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (8) $$

である。ガンマ関数はよく知られているように，$n!$ を拡張したものになっていて，n が自然数のときには，$n!=\Gamma(n+1)$ が成り立っている。

ここでベータ関数

$$ B(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (9) $$

を使って，

$$ {}_{x+y}C_x=\frac{1}{x+y+1}\,\frac{\Gamma(x+y+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} $$
$$ =\frac{1}{x+y+1}\,\frac{1}{B(x+1,\ y+1)} \quad (10) $$

と表すことができる。ベータ関数は

$$ B(x,\ y)=\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt=\int_0^\infty\frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt \quad (11) $$

と表すことができる。また，m，n を正の整数として，

$$B\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$$

$$B(m+1,\ n+1)=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \qquad (12)$$

と表すこともできる。

ベータ関数は ${}_nC_r$ で n, r を有理数に拡張した式になっている。$n!$ の拡張が実変数のガンマ関数であることは，よく知られているのに較べて，${}_nC_r$ の拡張が実変数のベータ関数に関係があることは意外と知られていないことなので，ここに書いてみた。この場合は，当然のことながら ${}_xC_y$ の値は整数にはならない。Mathematica を使って求めたいくつかの値を書いておく。

${}_{0.9}C_{0.4}=1.22313$　　${}_{0.9}C_{0.6}=1.19936$

${}_{0.9}C_{0.9}=1$　　${}_{1.1}C_{0.1}=1.1$

${}_{1.1}C_{0.3}=1.25194$　　${}_{1.1}C_{0.5}=1.32156$

${}_{1.1}C_{0.7}=1.29804$　　${}_{1.1}C_{1}=1.1$

§4．おわりに

${}_nC_r$ の n, r を有理数にするというアイディアは唐突のようにみえるが，高校生にとっても決して目新しいものではない。例えば，

指数における 2^2, $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\sqrt{2}}$ や

微分における $(x^2)'$, $(x^{\frac{1}{2}})'$

のように，はじめ自然数で学んだものを有理数にまで拡張する事例はいくつか学んでいることである。

《参考文献》

〔1〕 阪本茂(2006)「分数式 $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$ の値は整数」数研通信 No.54, p.14

〔2〕 泉信一，近藤基吉，穂刈四三二，永倉俊充(2002)「共立数学公式」共立出版株式会社

〔3〕 片岡宏信(2005)「生徒が主体的に取り組む発展的な数学教材」日本数学教育学会誌，第87回総会特集号，p.446

〔4〕 片岡宏信(2006)「生徒が主体的に取り組む発展的な数学教材を目指して」 兵庫県数学教育会高等学校部会　平成17年度研究集録，p.20

(兵庫県立大学附属高等学校)