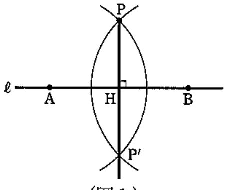
私の数学教材研究ノートから　第3回

田島（たじま）　宅二（たくじ）

§1．その教材研究の動機

「**教科書を**教えるのではなくて**教科書で**教える。」とは，教育実習の時から聞かされた言葉である。しかし，その真の実践化となると容易ではない。学校には年間計画があり，時間数が配当されていて，教材を発展的に，連続的に，発見的に指導するゆとりがないのが現状ではあるまいか。そうであればあるほど，私たちの教材研究の力で，生徒たちに数学への興味の湧くような指導が求められる。私はかつて「数学教室」(数学教育協議会編集　国土社)No.53 1959(Ｓ34)4月号に実践記録「どのようにして研究心をもたせようとしたか<私の図形教育の出発>」を発表したことがある。その p.55 に「問題からただ単に答えを出してよろこんでいる生徒は学習の奴隷である。われわれは生徒を学習の奴隷にしてはいけないと思う。むしろ，**問題から問題を生み出す問題の生産者**に育てあげねばならぬ。」と若気の至りで書いてある。爾来47年もたつがいまだに考えがかわらない。通り一遍に終わらせたくないという気持ちが人一倍強いのかも知れない。

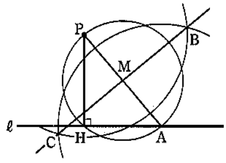
§2．1点Pから直線 l に垂線をおろす



(図1)

l 上に2点A，Bをとり，A，Bを中心に，それぞれ半径AP，BPの円をえがく。その交点をP′とする。P，P′を結ぶと $l \perp PP'$ となる。普通はこれで終わる。

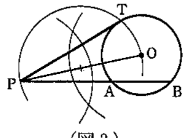
私はこれで終わらない。まだ，円の性質を生かしたおもしろい方法があるんだよといって次の作図を披露する。



(図2)

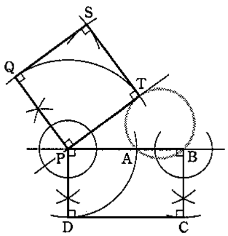
l 上に1点Aをとり，P，Aを中心に適当な同じ半径でそれぞれ円をえがく。2つの交点B，Cを結んでAPとの交点をMとし，Mを中心に半径MPの円をえがく。この円と l とのA以外の交点をHとする。∠PHAが直径PAに対する円周角のため，直角となる。ゆえに $PH \perp l$。生徒にこれを作図させると異口同音に「おや，本当だ。どうしてー。」といって驚くのである。

§3．方べきの定理の発展



(図3)

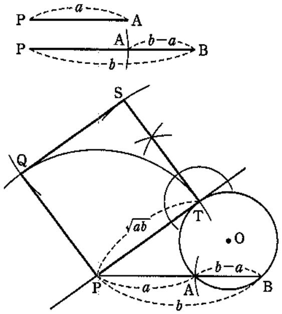
図3でPTは接線，PBは割線のとき，$PT^2 = PA \cdot PB$ であることは周知の通りである。この証明で終わらせたくないのである。この式を図示すればどうなるかを考えさせたいのである。問題から問題が生み出されたわけである。図4に示すように正方形PQSTと長方形PBCDの面積がそれぞれ等しいことを示しているともいえる。(コンパスのあとをそのまま残した。)



(図4)

この図4から更に問題をつくろう。

長方形の縦を a，横を b とする。($a<b$) このとき，面積 ab に等しい正方形を作図するにはどうしたらよいか。順序を番号で示す。



(図5)

①任意の円をえがき，円周上の点Bを中心に，コンパスで $b-a$ をとり，交点をAとする。BA を延長し $a=\mathrm{AP}$ となるPをとる。

②Pから円Oに接線を図3の方法でひき，その交点をTとする。

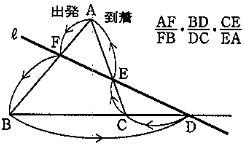
③PT を一辺とする正方形 PTSQ をコンパスを用いて図5のように書く。

以上のようにすれば面積 ab に等しい正方形を作図することができる。(一辺の長さ $\sqrt{ab}$ を作図していることでもある。) 因に正方形を決定してもその面積に等しい長方形の縦と横はたった一通りに決定しない。Pからの割線が何本でもひけるからである。又 PT の長さは，2本の線分の長さ a，b の相乗平均でもある。

§4．メネラウスの定理の発展

この定理は，三角形のあるところへ1本の直線が交わって発生する定理で，なかなかリズムがあっておもしろい。

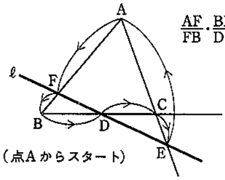
(1) DがBCの延長上にある場合



$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

(図6)

(2) DがBC上にある場合



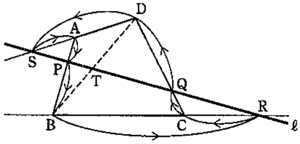
$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

(図7)

これらも周知の通りであるが直方体の3辺 AF, BD, CE の体積と直方体の3辺 FB, DC, EA の体積が等しいとつなげてゆくのもおもしろい。

しかし，ここでは四角形のあるところへ1本の直線が交わるときを考えてみよう。

(3) 四角形の向かい合う辺を直線が交わる場合



(図8)

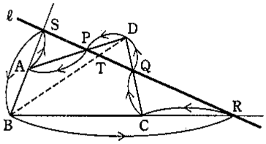
$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QD}}\cdot\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TB}}=1 \quad\cdots\cdots①$$

$$\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{TD}}=1 \quad\cdots\cdots②$$

①×② から

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QD}}\cdot\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=1 \quad\cdots\cdots③$$

(4) 四角形の隣り合う辺を直線が交わる場合



(図9)

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QD}}\cdot\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TB}}=1 \quad\cdots\cdots①$$

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TB}}=1 \quad \text{両辺の逆数をとって}$$

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{BS}}\cdot\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{TB}}{\mathrm{DT}}=1 \quad\cdots\cdots②$$

①×② から

$$\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}=1 \quad\cdots\cdots③$$

このようにして図8も図9も点線BTDを媒介として①，②から結論③を得る。（なお，読み方であるが，例えば$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}$を分数として読まないでAF対FBと読む。）

§5．内積の指導の工夫

どの教科書を見ても，ベクトルの成分による計算$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

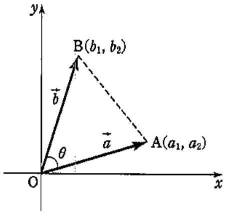
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

等を扱ったあと応用問題を学習する順序になっている。次にベクトルの内積の定義として

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ……Ⓐ

が出てくる。生徒の学習心理としては，和，差を学習したから，次は積の学習を予測する。その積は，$\vec{a}\times\vec{b}$ ではなくて内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ とよばれる特別なもので，Ⓐのように定義される。$\vec{a}\cdot\vec{b}$ が，どうして，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ となるのだろう，定義されるのだろう，と思ってしまうのである。数学は定義から出発するのが常道であるが，Ⓐの式の登場が生徒にとってはあまりにも唐突なのである。

そこで私は次のような順序で内積への指導の工夫をしている。



（図10）

余弦定理を思い出させて

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$

この4つの項では3つが平方数になっているが，1つだけ平方数になっていないのでその1つについて解くと

$$2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2$$

$$\therefore\quad \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2)$$

$$=\frac{1}{2}[(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}]$$

$$=a_1b_1+a_2b_2 \text{ ……Ⓑ}$$

このⒷはA(a_1, a_2)，B(b_1, b_2)のx成分どうしの積とy成分どうしの積の和になっている。そこでⒷを簡単に書いて $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書くと私は説明している。

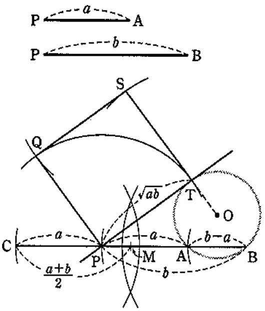
つまり，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ が $a_1b_1+a_2b_2$ になるのではなくて，$a_1b_1+a_2b_2$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書くことにしたのだと指導していきたい。その認識が深まった中で，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

となっていく所以を内積の指導の出発にあたって，ばっちりおさえていきたいものである。これが又，いささか大げさだが内積の発見的な指導だと信ずる。

§6．補記

与えられた2つの線分を用いて長方形の面積abに等しい正方形を図5で作図したが，図11でAPの延長上にAP=PCとなる点Cをとり，BCの中点MをとればCM，BMは相加平均の図示である。実測すると ※$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ である。



（図11）

（※等号のときは2本の接線）

この小論は，数研通信 数学No.49の続編である。

《参考文献》

〔1〕 田島宅二　　数学教室　1959年　4月号
国土社

（元高校教員）