取り出した赤玉の個数の期待値

中野(なかの)　友次(ともつぐ)

§1．はじめに

1年生の数学Aのテストで，次のような問題を出題した。

> 赤玉3個，白玉2個が入った袋から，次の方法で3個の玉を取り出すとき，赤玉の個数の期待値を求めよ。
> (1)　3個の玉を同時に取り出すとき
> (2)　玉を1個取り出して，色を調べてからもとに戻すことを3回繰り返すとき

出題の意図は，(1)は通常の確率計算から期待値を求め，(2)は反復試行の確率から期待値を求め，これらが同じになることを学ばせることにあった。
事前の検討の際，きちんと上のような計算をせず，期待値がいずれも

$$\text{期待値}\quad E=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}\,(\text{個})$$

という解答が出てきた場合どうするかが問題になった。そこで，この解答は公式とは言えず，また，自明であるとはいえないので証明なしでは使ってはいけないと答えておき，一般式での証明を試みた。

> 赤玉L個，白玉M個が入った袋から，次の方法でn個の玉を取り出すとき，赤玉の個数の期待値を求めよ。
> (1)　n個の玉を同時に取り出すとき
> (2)　玉を1個取り出して，色を調べてからもとに戻すことをn回繰り返すとき

§2．超幾何分布の期待値

n個の玉を同時に取り出すとき，n個中に赤玉がx個である確率は

$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \min(n,\ L)$ のとき

$$f(L,\ M,\ n\,;\,x)=\frac{{}_L\mathrm{C}_x\cdot{}_M\mathrm{C}_{n-x}}{{}_{L+M}\mathrm{C}_n}\qquad\cdots\cdots①$$

xがその他の値をとるとき

$$f(L,\ M,\ n\,;\,x)=0$$

となる。もちろん

$$\sum_{x=0}^{n}f(L,\ M,\ n\,;\,x)=1\qquad\cdots\cdots②$$

である。そして，赤玉の個数の期待値は

$$E=\sum_{x=0}^{n}x\cdot f(L,\ M,\ n\,;\,x)\qquad\cdots\cdots③$$

で求められる。③式は

$$E=\sum_{x=1}^{n}x\cdot\frac{{}_L\mathrm{C}_x\cdot{}_M\mathrm{C}_{n-x}}{{}_{L+M}\mathrm{C}_n}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}x\cdot\frac{\dfrac{L!}{(L-x)!\,x!}\cdot\dfrac{M!}{\{M-(n-x)\}!\,(n-x)!}}{\dfrac{(L+M)!}{(L+M-n)!\,n!}}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\frac{L\cdot\dfrac{(L-1)!}{\{(L-1)-(x-1)\}!\,(x-1)!}\cdot\dfrac{M!}{\{M-(n-x)\}!\,(n-x)!}}{\dfrac{L+M}{n}\cdot\dfrac{\{(L-1)+M\}!}{\{(L-1)+M-(n-1)\}!\,(n-1)!}}$$

$$=\frac{nL}{L+M}\times$$

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{\dfrac{(L-1)!}{\{(L-1)-(x-1)\}!\,(x-1)!}\cdot\dfrac{M!}{\{M-(n-x)\}!\,(n-x)!}}{\dfrac{\{(L-1)+M\}!}{\{(L-1)+M-(n-1)\}!\,(n-1)!}}$$

ここで，$x-1=y$ とおけば

$$E=\frac{nL}{L+M}\times$$

$$\sum_{y=0}^{n-1}\frac{\dfrac{(L-1)!}{\{(L-1)-y\}!\,y!}\cdot\dfrac{M!}{\{M-(n-1-y)\}!\,(n-1-y)!}}{\dfrac{\{(L-1)+M\}!}{\{(L-1)+M-(n-1)\}!\,(n-1)!}}$$

$$=\frac{nL}{L+M}\sum_{y=0}^{n-1}\frac{{}_{L-1}\mathrm{C}_y\cdot{}_M\mathrm{C}_{n-1-y}}{{}_{(L-1)+M}\mathrm{C}_{n-1}}$$

$$=\frac{nL}{L+M}\sum_{y=0}^{n-1}f(L-1,\ M,\ n-1\,;\,y)$$

となり

$$\sum_{y=0}^{n-1}f(L-1,\ M,\ n-1\,;\,y)=1$$

であることから

$$E=\frac{nL}{L+M}\qquad\cdots\cdots④$$

§3．反復試行での期待値

赤玉L個，白玉M個が入った袋から，玉を1個取り出して，色を調べてからもとに戻すことをn回繰り返すとき，ちょうどx回赤玉が出る確率は

$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \min(n,\ L)$ のとき

$$g(L, M, n\ ;\ x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{L}{L+M}\right)^x\left(\frac{M}{L+M}\right)^{n-x}\cdots⑤$$

xがその他の値をとるとき

$$g(L,\ M,\ n\ ;\ x)=0$$

となる。もちろん

$$\sum_{x=0}^{n}g(L,\ M,\ n\ ;\ x)=1 \qquad \cdots\cdots⑥$$

である。そして，赤玉の個数の期待値は

$$E=\sum_{x=0}^{n}x\cdot g(L,\ M,\ n\ ;\ x) \qquad \cdots\cdots⑦$$

で求められる。⑦式は

$$E=\sum_{x=1}^{n}x\cdot{}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{L}{L+M}\right)^x\left(\frac{M}{L+M}\right)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}x\cdot\frac{n!}{(n-x)!x!}\cdot\left(\frac{L}{L+M}\right)^x\left(\frac{M}{L+M}\right)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}n\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(x-1)\}!(x-1)!}$$

$$\times\frac{L}{L+M}\cdot\left(\frac{L}{L+M}\right)^{x-1}\left(\frac{M}{L+M}\right)^{(n-1)-(x-1)}$$

$$=\frac{nL}{L+M}\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(x-1)\}!(x-1)!}$$

$$\times\left(\frac{L}{L+M}\right)^{x-1}\left(\frac{M}{L+M}\right)^{(n-1)-(x-1)}$$

ここで，$x-1=y$ とおけば

$$E=\frac{nL}{L+M}\times$$

$$\sum_{y=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-y\}!y!}\cdot\left(\frac{L}{L+M}\right)^y\left(\frac{M}{L+M}\right)^{(n-1)-y}$$

$$=\frac{nL}{L+M}\sum_{y=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_y\left(\frac{L}{L+M}\right)^y\left(\frac{M}{L+M}\right)^{(n-1)-y}$$

$$=\frac{nL}{L+M}\sum_{y=0}^{n-1}g(L,\ M,\ n-1\ ;\ y)$$

となり

$$\sum_{y=0}^{n-1}g(L,\ M,\ n-1\ ;\ y)=1$$

であることから

$$E=\frac{nL}{L+M} \qquad \cdots\cdots⑧$$

§4．おわりに

§1．(1)，(2)の一般式での証明は，以上の通りであるが，§2．の確率$f(L,\ M,\ n\ ;\ x)$は教科書では，必ず「n個の玉を同時に取り出すもの」として扱われている。これは実は，同時でなくても1個ずつ非復元で抽出しても同じであるが，その場合には，確率は，超幾何分布として取り扱うことになり，これを避けるための配慮と思われる。

なお，蛇足ながら，冒頭の問題に対する解答は，

(1) $$E=1\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}+2\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}+3\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}$$

$$=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{6}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$$

(2) $$E=1\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2+2\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$+3\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$=1\times\frac{36}{125}+2\times\frac{54}{125}+3\times\frac{27}{125}=\frac{9}{5}$$

最後に，冒頭の問題でのテストでは，実際に(1)，(2)の(答え)を $3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$ と解答していた生徒が何人かいたことを記しておく。

(大阪府立島本高等学校)