生徒の素朴な質問に思うこと(II)

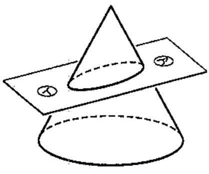
―楕円の問題から―

にしもと　のりよし
西元　教善

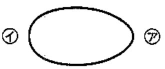
§1．はじめに

数学Cの「式と曲線」で「2次曲線」を扱うが，そこでは放物線，楕円，双曲線といった3種類の曲線が x，y の2次方程式で表されること，円錐を平面で切ったときの切り口に出現することから「円錐曲線」とも呼ばれることに触れてある。そのことが図入りで紹介されているから，座標という概念のない時代に先人が「2次曲線」を「円錐」を基に，統一的に捉えていたことが窺がえて，生徒の興味・関心を喚起しているようである。ただ，授業でこの説明を行うと必ずといっていいほど同じ質問を受ける。それは「楕円」についてである。

つまり，円錐をある平面で切ると，その切り口には[図1]のように楕円が出るというが，㋐の部分は㋑の部分よりも円錐の上方にあるので㋐付近の曲がり具合の方が㋑付近のそれよりもきつくて，[図2]のような卵形になるのではないか，従って楕円にはならないのではないかというものである。



[図1]



[図2]

本稿では，この質問に対する説明を行うに当たり感じたことを述べてみたい。

§2．扱わないこと・削除されていたこと

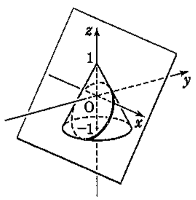
この予期された質問(さらりと受け流すことも多かったが)に対して，「決して卵形ではなく，楕円になることを示そう。」と言いかけて，はたと手が止まってしまった。そう言えば，円錐の側面を表す方程式はおろか，空間内の平面(一般)の方程式さえ教科書には出ていないのである。扱っているのは，空間のベクトルの準備としての xy 平面，yz 平面，zx 平面およびそれらに平行な平面といったシンプルなものだけである。空間ベクトルで平面のベクトル方程式は扱うが，$ax+by+cz+d=0$ という形で扱うことはない。空間内の直線の方程式も同様である。

円錐の側面の方程式と平面の方程式を連立させ，そこに楕円の方程式が出ることで納得させようと思っていたのであるが，このような状況を踏まえると無理であった。

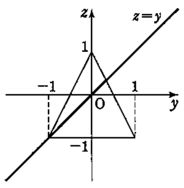
そこで，予備知識があまりないことを念頭に置き，無理のない例を題材にして，この説明を試みることにした。

§3．説明に用いた例

そこで，生徒にまず[図3](1)のようなイメージを持たせ，次に x 軸方向から見た[図3](2)を提示し，その交線(太線)が楕円になることを示そうとしていることを説明した。

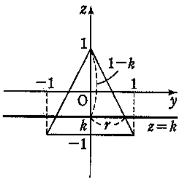


[図3](1)



[図3](2)

次に，円錐の側面の方程式を[図 4]のように，円錐の側面と平面 $z=k$ の交線である円周上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ の集合として構成することにした。



[図 4]

$(1-k):r=2:1$ より点Pは平面 $z=k\,(-1\leqq k\leqq 1)$ 上の半径 $(1-k)/2$ の円周上にあるから，x，y，z は，

$$x^2+y^2=\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\ (-1\leqq z\leqq 1) \qquad \cdots\cdots①$$

を満たすが，これがこの円錐の側面の方程式である。

また，[図 3](2)において，この円錐を斜めに切る平面の方程式は，

$$z=y \qquad \cdots\cdots②$$

である。

従って，①と②を連立させれば，その交線の方程式が求められる。計算すると，

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1 \qquad \cdots\cdots③$$

ただし，ここで，**交線の方程式は②の条件のもとでの③であって，③だけならば楕円柱である。つまり，考えている曲線は楕円柱③と平面②との交線と**いうことで，その方程式は，

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1,\ z=y \qquad \cdots\cdots④$$

となるが，これでは生徒にとっては今ひとつ釈然としないようである。やはり，余計な条件のない⑤の形にしないと納得できないのである。

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots⑤$$

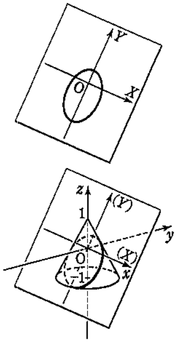
そこで，平面 $z=y$ と yz 平面の交線を Y 軸，x 軸を X 軸と書き改めて，点Pの **XY 平面での座標を $(X,\ Y)$，xyz 空間での座標を $(x,\ y,\ z)$ とすれば，$X=x$，$Y=\sqrt{2}\,y$** であるから，

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\frac{\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$$

すなわち，

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\frac{\left(Y+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=1 \qquad \cdots\cdots⑥$$

が導かれる。この⑥式に至れば，さすがにこの曲線が楕円であることが理解できたようである。[図 5]



[図 5]

§4．おわりに

高校の程度を越えることから「一般に，……であることが知られている。」という形での紹介は，数学好きの生徒の興味を引くようである。現状の数学力では手の届かないところもあれば，少し背伸びをすれば届くこともある。「 2 次曲線」が「円錐曲線」とも呼ばれることとその理由の周りには，座標のもつ威力や座標導入前の先人のすばらしい洞察力を思い知る感動があるはずである。

空間内の平面の方程式が扱われなくなって久しいが，そのためこのような題材さえ気楽に考えることができなくなっている。いかにも惜しい気がする。文部科学省も現教育課程の見直しと早期改訂を行い，世界トップクラスの学力を回復することを積極的に推進するようであるが，改訂のたびに削減された分野やもう一歩踏み込んで欲しい内容を復活させ，数学の授業時間数が増加することを期待するのは私だけではあるまい。

(山口県立岩国高等学校)