「sinクロス」で微分する

楠田（くすだ） 貴至（たかし）

§0．はじめに

先ほど，数研通信No.53において，「数学II」で出てくる三角関数の公式を覚える方法として「sinクロス」を紹介したが，今回は三角関数の微分が，実は平行移動であることを示し，それならば「sinクロス」が微分にも使えるではないかということを述べたいと思う。

§1．高次導関数

$y=\sin x$ のとき，

$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，$y'''=-\cos x$，

$y^{(4)}=\sin x$，$y^{(5)}=\cos x$，……

であるから，

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ。

これは数学的帰納法で証明すると

(i) $n=0$ のとき，明らかに成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，成り立つと仮定すると

$\frac{d^k}{dx^k}\sin x=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\sin x&=\frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\\&=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\\&=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

以上(i)(ii)から，

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことがわかる。

しかし，このことは，α を任意の定数として

$$\frac{d}{dx}\sin(x+\alpha)=\cos(x+\alpha)=\sin\left(x+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

であることから，明らかではある。

すなわち，$\sin(x+\alpha)$ を x で1回微分するというのは，偏角に $\frac{\pi}{2}$ を加えることと同じであり，これはまた，$y=\sin(x+\alpha)$ のグラフを，x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動するということでもある。

同様に，$y=\cos x$ のとき，

$y'=-\sin x$，$y''=-\cos x$，$y'''=\sin x$，

$y^{(4)}=\cos x$，$y^{(5)}=-\sin x$，……

であるから，

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\cos(x+\alpha)=-\sin(x+\alpha)=\cos\left(x+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

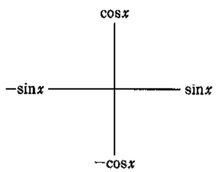
であるから，これもまた証明するまでもなく明らかである。

すなわち，$\cos(x+\alpha)$ を x で1回微分するというのは，偏角に $\frac{\pi}{2}$ を加えることと同じであり，これは，$y=\cos x$ のグラフを，x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動することであることも $\sin x$ の場合と同じである。

§2．「sinクロス」

さて，ここで，以前紹介した「sinクロス」であるが，下のような図である。

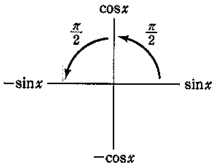
sinのグラフを「sinカーブ」と言うのに対し，これをもじって，この図を「sinクロス」と名づけた。



これを用いると，例えば公式

$$\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x\end{cases}$$ が，

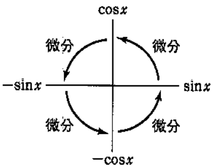
下の図のように，$\sin x$ のところから $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させると $\cos x$ になり，同様に，$\cos x$ のところから $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させると $-\sin x$ になるというように覚えやすいというものであった。



つまり，$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ「平行移動」したものが，$y=\cos x$ であるということを「sinクロス」という図を用いて「回転」で説明したものである。

§3．「微分 ⇄ 平行移動」⇄ 回転

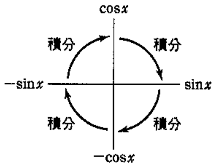
以上のことから，下の図のように「sinクロス」を使って，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$ 等が見て取れる。



§4．不定積分

このように，「sinクロス」で微分を見ると，その逆演算である積分も同様に見ることができる。

$y=\sin x$ および $y=\cos x$ の微分が，x 軸方向へ $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動することならば，x 軸方向へ $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動することで積分ができる。「sinクロス」では，右回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させることになる。



$$\int\sin x\,dx=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+C=-\cos x+C$$

$$\int\cos x\,dx=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+C=\sin x+C$$

（C は積分定数）

§5．おわりに

数学IIの三角関数の公式を覚えやすくするためのいわば「方便」であった「sinクロス」というものを通して(使うことによって)，微分や積分を見るとその間に平行移動が隠れていることに気がつきやすい。このように，唐突ではあるものの，ある種の「方便」を持ち出して，その橋渡しをすることで，見通しがよくなったり，新たなことに気がついたりすることも数学の魅力ではないかと思う。覚えることがより深く考えるための手段や動機になるのであれば，覚えることも悪くはないなというのは，以前と変わらない思いである。

(兵庫県立武庫荘総合高等学校)