三角形の面積を利用して「点と直線との距離公式」を導く

石川　光一（いしかわ　こういち）

§0．はじめに

点と直線との距離公式 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ は，図形の問題を扱うときにたいへんよく使われるものですが，生徒にとってその証明はかなり難しく，これまで私の授業では一通り証明はするものの，結局は結果を覚えるだけになっていました。

そこで，今年は面積を利用した証明を考えて授業をしてみました。

§1．原点Oと直線 $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$ との距離 d を求める

直線と x 軸，y 軸との交点を $\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q)$ とする。

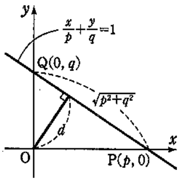
三角形OPQの面積を2通りで表すと，

$$\frac{1}{2}|p||q|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}\times d$$

よって

$$d=\frac{|pq|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$



§2．原点Oと直線 $ax+by+c=0$ との距離 d を求める

$$ax+by+c=0 \iff ax+by=-c \iff$$

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1 \iff \frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1$$

なので，§1の結果を用いると

$$d=\frac{\left|\left(-\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{c}{b}\right)\right|}{\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2+\left(-\frac{c}{b}\right)^2}}=\frac{\left|\frac{c^2}{ab}\right|}{\sqrt{\frac{c^2(b^2+a^2)}{a^2b^2}}}$$

$$=\frac{\frac{|c|^2}{|ab|}}{\frac{|c|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

§3．点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離 d を求める

点Aと直線 $ax+by+c=0$ を x 軸方向に $-x_1$，y 軸方向に $-y_1$ 平行移動する。

2つの図形は，それぞれ原点Oと直線

$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$　すなわち

$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$　に移る。

よって，求める距離 d は原点Oと直線

$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$

との距離に等しく，§2の結果を用いると

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　が得られる。

§4．おわりに

この説明の仕方には次のようなメリットがあると思います。

① せっかく習っても，$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$ を用いる機会は少ないものですが，この方法はこの表現だからこそわかりやすくなります。(§1)

② 面積を利用して高さを求めるというテクニックを経験できます。(§1)

③ 定着しにくい $\sqrt{a^2}=|a|$ が登場します。(§2)

④ 平行移動が役に立ちます。(§3)

（北海道大麻高等学校）