積分の公式色々

松田（まつだ）　康雄（やすお）

§0．はじめに

本稿では，$f(x)$ は $(0\leqq)a\leqq x\leqq b$ で定義された微分可能な関数で，$\geqq 0$ であるが恒等的に 0 ではないとする。x 座標が $x\,(a\leqq x\leqq b)$ における値が $f(x)$ である図形の重心の x 座標 g は

$$\boxed{g=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}}\quad\cdots\cdots①$$

で与えられる。この式を見るうちに，分子が「バウムクーヘン型求積法の公式」と似ていることに気がついた。

「バウムクーヘン型求積法の公式」とは，

$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転した回転体の体積 V が

$$\boxed{V=2\pi\int_a^b xf(x)dx}\quad\cdots\cdots②$$

となる，というものである。2π を除けば，①の分子と同じ。**これは偶然か？**

一方，$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ を単調増加な関数としたとき，$y=f(x)$, $y=f(a)$, $y=f(b)$, および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに回転した回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_{f(a)}^{f(b)} x^2dy$$

で計算できる。これは，$dy=f'(x)dx$ より

$$\boxed{V=\pi\int_a^b x^2f'(x)dx}\quad\cdots\cdots③$$

と表される。

②と③の被積分関数は，係数の π を除けば

$$\{x^2f(x)\}'=2xf(x)+x^2f'(x)\quad\cdots\cdots④$$

として関係づけられる。**これも偶然か？**

以下考察していきたい。

§1．①と②の関係

①に関して，重心の源をさかのぼれば，シーソーの支点に行き着く。

x 座標が α, β の所に，それぞれ体重 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ の人間が座って釣り合っているシーソーの支点の x 座標を g とする。すると

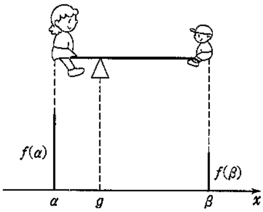
(支点からの距離)×(体重)

が一定より

$$(g-\alpha)f(\alpha)=(\beta-g)f(\beta)$$

から

$$g=\frac{\alpha f(\alpha)+\beta f(\beta)}{f(\alpha)+f(\beta)}$$



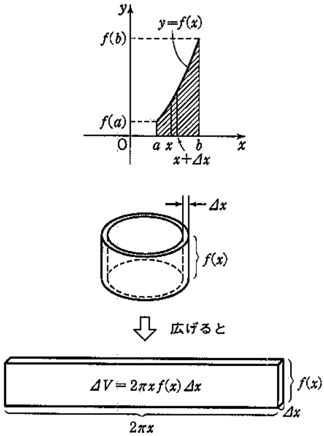
（図１）　シーソーの支点＝重心

が成り立つ(図１)。これを拡張して，区間$[a, b]$の各点 x に対して，重み $f(x)$ が与えられたときの重心の x 座標が①になる。

公式②に関して，$\varDelta x\fallingdotseq 0$ として，区間$[x, x+\varDelta x]$における $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を $\varDelta V$ とする。この立体は，底面が縦 $f(x)$, 横 $2\pi x$ の長方形，高さ $\varDelta x$ の四角柱とみなされる(図２)。したがって

$$\varDelta V=2\pi xf(x)\varDelta x$$

が成り立ち，②が導かれる。



(図2)　y 軸のまわりの回転体の ΔV

①の分子と②が似ているのは，それぞれの由来が異なるので，偶然かもしれない。しかし，この偶然のおかげで，「パップス・ギュルダンの定理」(の特別な場合)が導かれる。

「パップス・ギュルダンの定理」とは，ある図形が自身と重なることなく移動してできる立体の体積 V が

$V=$(図形の面積) 　　　　×(重心の移動距離)

……⑤

と計算できる，というものである。

①の分母は，$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ と x 軸で囲まれた部分の面積なので，これを S とおくと

$$\int_a^b f(x)dx=S$$

より，②から

$$V=2\pi gS$$

となり，⑤が示される。

§2．②と③の関係

②+③ を計算すると，④から

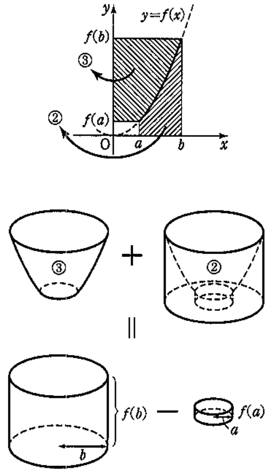
$$\pi\int_a^b\{2xf(x)+x^2f'(x)\}dx$$
$$=\pi\int_a^b\{x^2f(x)\}'dx$$
$$=\pi\Big[x^2f(x)\Big]_a^b$$
$$=\pi\{b^2f(b)-a^2f(a)\}$$

となる。

これは，底面が半径 b の円，高さが $f(b)$ の円柱から，底面が半径 a の円，高さが $f(a)$ の円柱をくり抜いた立体の体積を表す。

②と③の被積分関数の間に④の関係があるのは，偶然ではなく，積分②と③が互いに補完しあって円柱の体積を表すことに由来しているからである。

ここで念を押すと，②は $y=f(x)$ と x 軸，③は $y=f(x)$ と y 軸で囲まれた部分を，それぞれ y 軸のまわりに回転させた回転体の体積を表す(図3)。



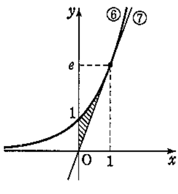
(図3)　②と③が補完しあって円柱ができる

公式②，③の応用として，次の問題を x に関する積分で計算してみよう。

問題　$y=e^x$ ……⑥

$y=ex$ ($x=1$ における⑥の接線) ……⑦

および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



略解１　(②を使う方法)

⑥，$x=1$，両軸で囲まれた部分の回転体の体積から，

⑦，$x=1$，x 軸で囲まれた部分の回転体の体積を引いて

$$V=2\pi\int_0^1 x(e^x-ex)dx$$

[部分積分省略]

$$=2\pi\left[(x-1)e^x-\frac{e}{3}x^3\right]_0^1=\left(2-\frac{2}{3}e\right)\pi$$

略解２　(③を使う方法)

⑦，$y=e$，y 軸で囲まれた部分の回転体の体積から，

⑥，$y=e$，y 軸で囲まれた部分の回転体の体積を引いて

$$V=\pi\int_0^1 x^2(e-e^x)dx$$

[部分積分省略]

$$=\pi\left[\frac{e}{3}x^3-(x^2-2x+2)e^x\right]_0^1=\left(2-\frac{2}{3}e\right)\pi$$

§3．おわりに

「パップス・ギュルダンの定理」は受験のための裏技的公式(筆者はかつてそう思い込んでいた)ではなく，重心の定義から自然に導かれる公式であった。

公式②は平成元年の東大入試に出題されて有名になったもので，実際に便利な公式である。その原理を知っておくこと，③と比較することによって，さらに理解が深まると思う。

積分に限らないが，数学の公式は，その意味や意義を理解した上で，自在に操れるようになるのが理想である。そのためには，公式の由来や公式どうしのつながりを知ることが重要だと思う。

《参考文献》

〔１〕 矢野健太郎編　数学小辞典　共立出版　1970
〔２〕 大学への数学　89年４月号　東京出版
〔３〕 チャート受験数学　テーマ４　積分法　数研出版　1989
〔４〕 新課程　チャート式基礎からの数学Ⅲ＋Ｃ　数研出版　2004

(明治学園高等学校)