パスカルの三角形の考察

大塚(おおつか)　秀幸(ひでゆき)

§1．はじめに

パスカルの三角形を考察すると，二項係数に関する興味深い関係式があることがわかる。本稿では最近私が発見した二項係数のある関係式を紹介する。

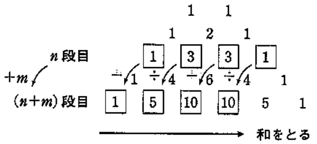
§2．はじめの発見

ここで示す関係式は，以前ある雑誌(参考文献〔1〕参照)で発表したもので，本稿の狙いはこの関係式の一般化である。

【定理1】 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{{}_nC_i}{{}_{n+m}C_i}=\frac{n+m+1}{m+1}$

この式の意味するところは次の通りである。

意味…パスカルの三角形の上から n 段目とその m 段下にある $(n+m)$ 段目の比の和である。(図1)



(図1)

図1の場合($n=3$，$m=2$)　$\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\frac{{}_3C_i}{{}_5C_i}=\frac{3+2+1}{2+1}=2$

なお，この定理の証明は参考文献〔1〕を参照のこと。

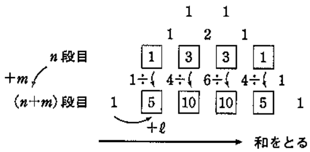
§3．一般化

定理1を一般化しよう。

【定理2】 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{{}_nC_i}{{}_{n+m}C_{l+i}}=\frac{n+m+1}{{}_mC_l(m+1)}$

この式の意味するところは，次の通りである。

意味…パスカルの三角形の上から n 段目と $(n+m)$ 段目を l だけずらしたものとの比の和である。(図2)



(図2)

図2の場合($n=3$，$m=2$，$l=1$)

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{{}_3C_i}{{}_5C_{1+i}}=\frac{3+2+1}{{}_2C_1(2+1)}=1$$

この定理2を証明するために必要な補題を示しておこう。

§4．補題

この補題は定理2に対しスマートな証明を与えるために，非常に効果的である。(これは参考文献〔2〕を参考にしてわかり易く書きかえたものである)

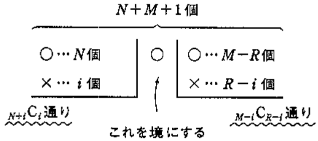
【補題】 $\displaystyle\sum_{i=0}^{R}{}_{N+i}C_i\cdot{}_{M-i}C_{R-i}={}_{N+M+1}C_R\quad(M>R)$

(証明)　いま，○が $N+M-R+1$ 個，×が R 個ある。

(I)　この $N+M+1$ 個の記号の順列の総数は，$\boxed{{}_{N+M+1}C_R}$ 通り。

上記の順列の総数を別の方法で数えよう。

(II)　順列の $N+i+1$ 番目を○としてこれを境に前半部分には○を N 個，×を i 個おき，後半部分には○を $M-R$ 個，×を $R-i$ 個おく。



この方法だと順列の総数は，$\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{R}{}_{N+i}C_i\cdot{}_{M-i}C_{R-i}}$ 通り。(このようにしてつくられた順列は，i を

0からRまで変えたとき，互いに同じ順列ができず，目的のすべての順列をつくることができることに注意する）

(I)(II)より　$\sum_{i=0}^{R} {}_{N+i}C_i \cdot {}_{M-i}C_{R-i} = {}_{N+M+1}C_R$　∎

§5．定理2の証明

定理2の証明をする。

（証明）

$$\frac{{}_nC_i \cdot {}_mC_l}{{}_{n+m}C_{l+i}} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{m!}{l!(m-l)!} \times \frac{(n+m-l-i)!(l+i)!}{(n+m)!}$$

$$= \frac{n!m!}{(n+m)!} \times \frac{(l+i)!}{i!l!} \times \frac{(n+m-l-i)!}{(n-i)!(m-l)!}$$

$$= \frac{{}_{l+i}C_i \cdot {}_{n+m-l-i}C_{n-i}}{{}_{n+m}C_n}$$

よって

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{{}_nC_i \cdot {}_mC_l}{{}_{n+m}C_{l+i}} = \frac{1}{{}_{n+m}C_n} \sum_{i=0}^{n} {}_{l+i}C_i \cdot {}_{n+m-l-i}C_{n-i}$$

$$= \frac{1}{{}_{n+m}C_n} \times {}_{n+m+1}C_n \quad \text{（補題より）}$$

$$= \frac{n!m!}{(n+m)!} \times \frac{(n+m+1)!}{n!(m+1)!}$$

$$= \frac{n+m+1}{m+1}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{{}_nC_i}{{}_{n+m}C_{l+i}} = \frac{n+m+1}{{}_mC_l(m+1)}$$ ∎

§6．おわりに

フィボナッチ数列がそうであるように，パスカルの三角形の中にもたくさんのシンプルな又は神秘的な関係式が隠されているのだろう。もしかしたら試行錯誤しながら自分の公式を生徒自身が見つけられるかもしれない。単に知られているものの証明だけで満足することなく，実験を通して予想をする楽しさを多く生徒に知ってもらいたいと私は思う。

《参考文献》

〔1〕 大塚秀幸　数学セミナー2005年8月号「2項係数の比の和」　日本評論社

〔2〕 László Lovász（成嶋弘，土屋守正　訳）数え上げの手法　東海大学出版会

休憩室　微分係数の平均と平均変化率の関係

「物体を自由落下させたとき3秒後から6秒後までの平均の速さを求めよ」

このような問題を見ているといつもあることを感じる。もちろん，落下した距離を落下している時間で割れば求まるのだが，気になるのは，「平均の速さ」という言葉である。この「平均の速さ」とは，実は「速さの平均」と等しいのではないだろうか。すなわち，この問題では3秒間の間に速さが常に変化しているが，時間を細かく区切りそれぞれの瞬間の速さの平均が，「平均の速さ」になるのではないかということである。

このことを確認するため次のように一般化して議論をする。

〈定理〉

$a \leqq x \leqq b$ で微分可能な連続関数 $f(x)$ がある。

$a \leqq x \leqq b$ を n 等分した点 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ における $f(x)$ の微分係数の平均 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(x_i)$ を考える。ここで $n \to \infty$ としたとき $f(x)$ の a から b まで変化したときの平均変化率と等しい。

すなわち　$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

（微分係数の平均＝平均変化率）

（証明）　$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(x_i)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f'\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f'(x)\,dx$$

（区分求積法による式変形！）

$$= \frac{1}{b-a}\Big[f(x)\Big]_a^b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ ∎

微分に関する定理で積分を用いるところが面白いと思うのだが，このテーマは微分と積分が表裏一体であることをあらためて実感できる良い例だと思う。

（東京都　元文教大学付属高等学校）