

Betz の限界(風車理論効率)を数学の教材に

みやた きいちろう
宮田 毅一郎

§1 はじめに

先日、灘中学校・高等学校の岡多賀彦氏が作成された冊子(「エネルギー」:灘中学校2年生対象にエネルギーをテーマにした物理の講義ノートをまとめた冊子)を本人から頂きました。その中で Betz の限界(風車理論効率)について扱った内容があり、その言葉を知りました。この中で扱う「ベルヌーイの定理」は物理の授業ではあまり扱わないものの、工業高校の機械科等の専門科目では扱うこともあり、問題誘導の仕方では数学(微分)と物理を融合した問題が作成でき、また、新エネルギーに興味を持つ題材にもなると思いました。早速、進学希望者で数学III選択の生徒を対象に参考文献〔2〕より印刷したものを補助資料とし、授業用プリントを作成し、授業を行いました。以下、作成したプリントを基に述べていきます。

§2 風車が発電する仕組み

参考文献〔2〕によると、以下のようなことが知られている。

- ① 風が羽根を押してロータが回転し、ロータに繋がっている発電機が回転して電気が生まれる。ここで、

出力(発電力)=トルク(風の力)×回転数の関係がある。

また、風車の羽根を廻す力は風速の3乗に比例して大きくなる。(後述)

- ② トルクと発電機が取り出す電力がつり合うと、同じ速度で回転する。トルクが優ると回転数が上がり、小さいと回転数が下がる。

例えば、風速3m/秒位で発電をはじめ(カットイン)。

風速13m/秒位で定格出力に到達する。

また、風速25m/秒以上で安全のために停止する(カットアウト)。

§3 風力発電の基本

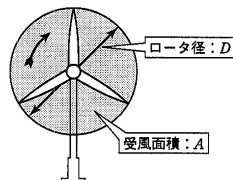
風から得られるエネルギーは風速の3乗に比例する。例えば、風速が2倍になると発電量は8倍になる。(三乗の法則)

$$P = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} (\rho A V) V^2 = \frac{1}{2} \rho A V^3$$

P : 風力エネルギー(W)

ρ : 空気密度(1.225 kg/m³)

A : 受風面積(m²) V : 風速(m/s)



〔参考〕(参考文献〔3〕による)発電効率を約43%、定格到達風速を11~12m/sとすると、風車の定格出力とロータ直径の関係は大体、次のようになる。

$$\text{定格出力 kW} \approx 0.3 \times (D = \text{直径 m})^2$$

この式より、定格出力3000kWの風車であれば、ロータ径は約100mとなる。

※ 定格出力: 定格風速以上の風が吹いている時の風車の出力、風車の最大出力

※ 定格風速: 最大出力時の風速、風力発電機の定格出力を得られる風速

§4 ベルヌーイ(Bernoulli)の定理

流体の運動に関係したエネルギー保存則のひとつであり、圧力を p 、流速を v 、基準面からの高さを h 、流体の密度を ρ 、重力加速度を g とすると

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = (\text{一定})$$

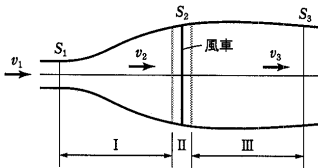
で表される。

(有名な定理であるが、授業では深入りせずに道具として使うに止めた。)

§5 風車理論効率を求める

今までの話を1枚のプリントにまとめ、簡単な基礎知識を解説後、参考文献〔1〕をもとに2枚目に風車理論効率を求める以下の誘導型の作業プリントを作成し、Betzの限界を求めた。

風車に流れ込む空気の流れを、流れの管にモデル化して考える。それぞれの場所における風速、管の面積、圧力を図のように取る。



風車まわりの流れのモデル化

【問題1】 ベルヌーイの定理より成り立つ関係式(2つ)を述べよ。

【解答】 ① $I : p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

② $III : p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$

【問題2】 上記の2式より成り立つ関係式を述べよ。

【解答】 $p_2 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_3^2)$

【問題3】 風車の受ける力 F は、運動量の法則より単位時間に風車を通過する空気質量と速度変化量の積に等しいことを用いて、関係式を述べよ。

【解答】 $F = S_2(p_2 - p_2')$
 $= S_2 v_2 \rho (v_1 - v_3)$

【問題4】 連続の式より、成り立つ関係式を述べよ。

【解答】 $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_3 v_3$

【問題5】 減速比(回転面で風が減速される割合)を a とするとき、 v_2 、 v_3 を v_1 を用いて表せ。

【解答】 $v_2 = (1-a)v_1$

また、(2)より $p_2 - p_2' = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_3^2)$
 $= \frac{\rho}{2}(v_1 + v_3)(v_1 - v_3)$

【問題3】より $p_2 - p_2' = v_2 \rho (v_1 - v_3)$

よって、 $v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2}$ であるから

$v_3 = 2v_2 - v_1 = (1-2a)v_1$

【問題6】 S_1 、 S_3 を通過する風のエネルギー E_1 、 E_3 を求めよ。

【解答】 $E_1 = \frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3$ 、 $E_3 = \frac{1}{2}\rho S_3 v_3^3$

【問題7】 風車の前後におけるエネルギー量の変化 $\Delta E = E_1 - E_3$ を求めよ。

【解答】 $\Delta E = E_1 - E_3 = \frac{1}{2}\rho(S_1 v_1^3 - S_3 v_3^3)$
 $= \frac{1}{2}\rho(S_1 v_1 \times v_1^2 - S_3 v_3 \times v_3^2)$

ここで、 $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_3 v_3$ 、 $v_3 = (1-2a)v_1$ であることより

$= \frac{1}{2}\rho S_2 v_2 (v_1^2 - v_3^2)$

$= \frac{1}{2}\rho S_2 v_2 \{v_1^2 - (1-2a)^2 v_1^2\}$

$= 2a(1-a)^2 \rho S_2 v_1^3$

【問題8】 風車がいないとき、 S_2 を通過する風のエネルギー E を求めよ。

【解答】 $E = \frac{1}{2}\rho S_2 v_1^3$

【問題9】 風車のエネルギー変換効率 $C_p = \frac{\Delta E}{E}$ を求めよ。

【解答】 $C_p = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}\rho S_2 v_1^2 \times 4a(1-a)^2}{\frac{1}{2}\rho S_2 v_1^3} = 4a(1-a)^2$

※ 風車のエネルギー変換効率 C_p をパワー係数といいます。

【問題10】 パワー係数 C_p の最大値を求めよ。

【解答】 $f(a) = 4a(1-a)^2$ とおくと

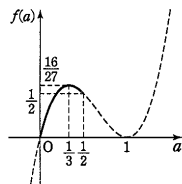
$f'(a) = 12a^2 - 16a + 4$
 $= 4(3a^2 - 4a + 1)$
 $= 4(a-1)(3a-1)$

$v_1, v_2, v_3 > 0$ より $1-a > 0, 1-2a > 0$

また、 $a \geq 0$ より $0 \leq a < \frac{1}{2}$

よって、 $f'(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{3}$...	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	0	↗	$\frac{16}{27}$	↘	$\frac{1}{2}$



ゆえに、 $a = \frac{1}{3}$ では極大であると同時に最大であり、最大値は $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$ である。

◎ これが **Betz の限界**(風車の最大効率)である。

この値 $C_p = \frac{16}{27} \approx 59.3\%$ が風車の理想効率である。

§6 おわりに

実際生徒に解説すると、ベルヌーイの定理を使うことだけでも難しく、今回の最大の目的である「3次関数の応用問題作成」という点では難しいテーマであり、生徒の実態に合わせた作成や改善点もあったと思う。

また、参考文献[3]によると、発電効率は最新型の風車でも約43%に留まるといふ。風車は流入する風を減速させてエネルギーを取り出す際に、減速率を上げると、風が風車を避けて流れて流入量が減るために効率に上限が生じるとのこと。

いずれにせよ風力発電を考えるにあたり、制約条件や大型化の課題などあるがそれも合わせて話題にできればと思う。

《参考文献》

- [1] 東京電力・大学生のためのインターネット電力講座
(http://www.tepco.co.jp/kouza/wind/betz_j.html)
- [2] 三菱重工業株式会社原動機事業本部・自然エネルギー発電プラント風力発電プラント風力講座
(<http://www.mhi.co.jp/power/wind/info/kisochishiki.html>)
- [3] 同上・技術論文、特集論文「次世代2MW級大型風車の開発」上田悦紀、柴田昌明著
(<http://www.mhi.co.jp/tech/pdf/415/415294.pdf>)
(金沢市立工業高等学校)