$n!$ について

深谷(ふかや)　茂樹(しげき)

§0　はじめに

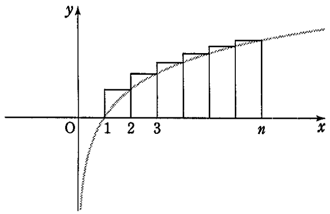
$n!$ はかなり大きな数となるが，その桁数や末尾につく 0 の個数など話題や問題になることも多い。ここではそれらについていくつかの考察を述べる。

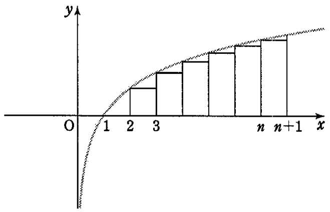
§1　$n!$ の桁数の近似

$n!$ の桁数を考えるにはその常用対数 $\log_{10} n!$ の値を調べなければならない。

まず $\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k$ であるから，下図の区分求積により次の不等式が得られる。

$$\int_1^n \log x\,dx < \log n! < \int_1^{n+1} \log x\,dx$$





$$\int_1^n \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n = n\log n - n + 1,$$

$$\int_1^{n+1} \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^{n+1}$$
$$= (n+1)\log(n+1) - n$$

であるから，

$$n\log n - n + 1 < \log n! < (n+1)\log(n+1) - n$$

底を変換して，

$$n(\log_{10} n - \log_{10} e) + \log_{10} e < \log_{10} n!$$
$$< (n+1)\log_{10}(n+1) - n\log_{10} e$$

となる。

したがって，$n!$ の桁数を N_n とすると，$0 < \log_{10} e < 1$ であるから

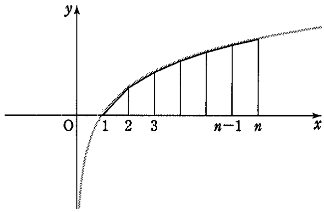
$$[n(\log_{10} n - \log_{10} e)] + 1 \leqq N_n$$
$$\leqq [(n+1)\log_{10}(n+1) - n\log_{10} e]$$

（[　]は整数部分）

である。

§2　台形公式による近似とスターリンの公式

図のように台形による区分求積をして



$$\frac{1}{2}(\log 1 + \log 2) + \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\{\log(n-1) + \log n\}$$
$$= \log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log n$$

を $\int_1^n \log x\,dx = n\log n - n + 1$ で近似する。

これにより，

$$\log n! \sim n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n$$

であるから，底を変換して

$$\log_{10} n! \sim n(\log_{10} n - \log_{10} e) + \frac{1}{2}\log_{10} n + \log_{10} e$$

となる。

ここで $0 < \log_{10} e < 1$ であるから，$n!$ はおおよそ $\left[n(\log_{10} n - \log_{10} e) + \frac{1}{2}\log_{10} n\right] + 1$ 桁である。

この近似をさらに吟味して評価したものがスターリンの公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

である。(参考文献〔1〕参照)

$$P_n=\left[n(\log_{10}n-\log_{10}e)+\frac{1}{2}\log_{10}n\right]+1,$$

$$Q_n=[n(\log_{10}n-\log_{10}e)]+1,$$

$$R_n=[(n+1)\log_{10}(n+1)-n\log_{10}e]$$

として N_n の値と比較してみると次の通りである。

n	N_n	P_n	Q_n	R_n
10	7	7	6	7
10^2	158	158	157	159
10^3	2568	2568	2566	2569
10^4	35660	35660	35658	35661
10^5	456574	456574	456571	456575
10^6	5565709	5565709	5565706	5565711
10^7	65657060	65657060	65657056	65657062
10^8	756570557	756570557	756570552	756570560
10^9	8565705523	8565705523	8565705519	8565705527
10^{10}	95657055187	95657055187	95657055181	95657055191

$1-\log_{10}e=0.5657055180967\cdots$ であるが，上記の桁数の先頭の数を除いた数の並びがよく似ている。例えば，10^{10} の桁数の先頭の 9 を除けば 5657055187 である。この例のように $n=10^m$ のときは，

$P_n=\left[n(\log_{10}n-\log_{10}e)+\frac{1}{2}\log_{10}n\right]+1$ で考えてみると，

$$\left[n(\log_{10}n-\log_{10}e)+\frac{1}{2}\log_{10}n\right]+1$$

$$=\left[10^m(m-\log_{10}e)+\frac{m}{2}\right]+1$$

$$=\left[10^m\{(m-1)+(1-\log_{10}e)\}+\frac{m}{2}\right]+1$$

$$=10^m(m-1)+\left[10^m(1-\log_{10}e)+\frac{m}{2}\right]+1$$

であるが，$\frac{m}{2}$ は $m=10$ でもたかだか 5 であるから，第 2 項により $1-\log_{10}e$ と数の並びがほとんど同じになる。(第 1 項が先頭の数である)

§3　$n!$ の末尾の 0 の個数

$n!$ の末尾の 0 の個数は $n!$ が 10 で何回割り切れるかであるが，$n!$ を素因数分解したときに因数 2 は十分に多くあるから因数 5 の個数に等しい。つまり，$n!=5^m\times K$（K は 5 の倍数ではない）と表したときの m である。したがって，1 から n までの数の積で因数 5 がいくつかあるかを求めればよいことになる。例えば，

$$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5\times(1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)=120$$

$$10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$=5^2\times(2\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)=3628800$$

のように，1 から n までの自然数の中での 5 の倍数の個数を考えればよいが，

$$25!=25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$=5^6\times(1\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot4\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot3\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot2\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)$$

$$=15511210043330985984000000$$

でわかるように，$25=5^2$ であるから，$25!$ の因数 5 の個数は 5 の倍数の個数に 25 の倍数の個数を加えなければならない。5^3, 5^4, …がある場合も同様である。

結局，$n!$ の末尾の 0 の個数を求めるためには，1 から n までの自然数の中の 5 の倍数の個数に 5^2 の倍数の個数を加え，5^3 の倍数の個数を加え，……と続ければよい。

1 から n までの自然数の中の 5 の倍数の個数は，n を 5 で割った商であり，5^2 の倍数の個数はその商を 5 で割った商であり，5^3 の倍数の個数はその商をさらに 5 で割った商である。つまり 5 で割った商と余りで

$$n=5n_0+a_0$$

$$n_0=5n_1+a_1\quad\cdots\cdots①$$

$$n_1=5n_2+a_2$$

$$\vdots$$

$$n_{k-2}=5n_{k-1}+a_{k-1}$$

と表したときの $n_0+n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}$ の値を求めればよい。

①より

$$n=5n_0+a_0$$

$$=5(5n_1+a_1)+a_0$$

$$=5^2(5n_2+a_2)+5a_1+a_0$$

$$\vdots$$

$$=5^{k-1}(5n_{k-1}+a_{k-1})+5^{k-2}a_{k-2}+5^{k-3}a_{k-3}+\cdots\cdots+5a_1+a_0$$

$$=5^kn_{k-1}+5^{k-1}a_{k-1}+5^{k-2}a_{k-2}+5^{k-3}a_{k-3}+\cdots\cdots+5a_1+a_0$$

$n_{k-1}=a_k$ とおくと

$$n=5^k a_k+5^{k-1}a_{k-1}+5^{k-2}a_{k-2}+5^{k-3}a_{k-3}+\cdots\cdots+5a_1+a_0$$

このように，n を5進法で表したことになる。

ここで，①の各式の辺々を加えると，

$$n+(n_0+n_1+n_2+\cdots+n_{k-2})$$
$$=5(n_0+n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})+(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})$$

これより，

$$4(n_0+n_1+n_2+\cdots+n_{k-2})+5n_{k-1}$$
$$=n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})$$
$$4(n_0+n_1+n_2+\cdots+n_{k-2}+n_{k-1})$$
$$=n-(n_{k-1}+a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})$$

$n_{k-1}=a_k$ であるから

$$4(n_0+n_1+n_2+\cdots+n_{k-2}+n_{k-1})$$
$$=n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)$$

したがって

$$n_0+n_1+n_2+\cdots+n_{k-2}+n_{k-1}$$
$$=\frac{1}{4}\{n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)\}$$

となる。

以上をまとめると次の通りである。

【定理】

自然数 n を $0\leqq a_i\leqq 4$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$，$1\leqq a_k\leqq 4$ である整数 a_i を用いて
$n=5^k a_k+5^{k-1}a_{k-1}+5^{k-2}a_{k-2}+5^{k-3}a_{k-3}+\cdots+5a_1+a_0$ と表したとき，$n!$ を10進法で表したときの末尾の0の個数は

$$\frac{1}{4}\{n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)\}$$

となる。

この内容をもとに次のような例題を考えてみた。(4)が定理と同じ内容である。

【例題】

自然数 k に対して $k=5^l\times m$ (l は0以上の整数，m は5の倍数でない自然数)と表すとき，$\alpha(k)=l$ とする。さらに，自然数 n に対して，$\beta(n)=\sum_{k=1}^{n}\alpha(k)$ とする。

(1) m を0以上の整数とする。$\beta(5^m)$ の値を求めよ。

(2) 整数 a_1，a_0 が $a_1\geqq 1$，$0\leqq a_0\leqq 4$ を満たすとき，

$$\beta(5a_1+a_0)=\beta(5a_1)=a_1+\beta(a_1)$$

であることを証明せよ。

(3) 自然数 n を $0\leqq a_i\leqq 4$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$，$1\leqq a_k\leqq 4$ である整数 a_i を用いて

$$n=5^k a_k+5^{k-1}a_{k-1}+5^{k-2}a_{k-2}+\cdots+5a_1+a_0$$

と表したとき(5進法表示)

$$\beta(n)=a_k\beta(5^k)+a_{k-1}\beta(5^{k-1})+\cdots+a_1\beta(5)$$

であることを証明せよ。

(4) $\beta(n)=\dfrac{1}{4}\{n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)\}$

であることを証明せよ。

(5) 2006! を10進法で表示したとき，末尾にいくつ0が並ぶか答えよ。

【解答】

(1) $m\geqq 1$ のとき

1から 5^m までの自然数の中で，5の倍数は 5^{m-1} 個，5^2 の倍数は 5^{m-2} 個，……，5^m の倍数は1個ある。

よって，

$$\beta(5^m)=5^{m-1}+5^{m-2}+\cdots\cdots+1=\frac{5^m-1}{4}$$

である。

$m=0$ のとき

$\beta(5^m)=0$ から $\beta(5^m)=\dfrac{5^m-1}{4}$ が成り立つ。

(2) 1から $5a_1+a_0$ までの自然数の中で，5の倍数は a_1 個ある。さらに，1から a_1 までの自然数 k に対する $\alpha(k)$ の総和は $\beta(a_1)$ であるから

$$\beta(5a_1+a_0)=a_1+\beta(a_1)$$

が成り立つ。

$\beta(5a_1)$ についても同様である。

(3) 5進法表示したときの最高位の累乗の指数 k での数学的帰納法で証明する。

$k=1$ のとき

(2)より，$\beta(a_1)=0$，$\beta(5)=1$ であるから

$$\beta(5a_1+a_0)=a_1+\beta(a_1)=a_1\beta(5)$$

が成り立つ。

$k=m$ のとき成り立つと仮定する。

$$\beta(5^{m+1}a_{m+1}+5^m a_m+5^{m-1}a_{m-1}+\cdots+5a_1+a_0)$$
$$=\beta(5(5^m a_{m+1}+5^{m-1}a_m+\cdots+5a_2+a_1)+a_0)$$
$$=(5^m a_{m+1}+5^{m-1}a_m+\cdots+a_1)+\beta(5^m a_{m+1}+5^{m-1}a_m+\cdots+a_1)$$

$$=(5^m a_{m+1}+5^{m-1}a_m+\cdots+a_1)$$
$$+a_{m+1}\beta(5^m)+a_m\beta(5^{m-1})+\cdots+a_2\beta(5)$$
$$=a_{m+1}\{5^m+\beta(5^m)\}+a_m\{5^{m-1}+\beta(5^{m-1})\}+\cdots$$
$$\cdots+a_2\{5+\beta(5)\}+a_1$$
$$=a_{m+1}\beta(5^{m+1})+a_m\beta(5^m)+\cdots+a_2\beta(5^2)+a_1$$
$$=a_{m+1}\beta(5^{m+1})+a_m\beta(5^m)+\cdots$$
$$\cdots+a_2\beta(5^2)+a_1\beta(5)$$

したがって，　$k=m+1$ のときも成り立つ。

以上より

$$\beta(n)=a_k\beta(5^k)+a_{k-1}\beta(5^{k-1})+\cdots+a_1\beta(5)$$

(4)　$\beta(n)=a_k\cdot\dfrac{5^k-1}{4}+a_{k-1}\cdot\dfrac{5^{k-1}-1}{4}+$

$$\cdots\cdots+a_1\cdot\frac{5-1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\{(5^k a_k+5^{k-1}a_{k-1}+\cdots+5a_1)$$
$$-(a_1+a_2+\cdots+a_k)\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(5^k a_k+5^{k-1}a_{k-1}+\cdots+5a_1+a_0)$$
$$-(a_0+a_1+a_1+a_2+\cdots+a_k)\}$$
$$=\frac{1}{4}\{n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)\}$$

(5)　末尾の 0 の個数は 10 の倍数の個数と等しい。
$10=2\times5$ であるから 5 の倍数の個数と等しい。
(2 の倍数の個数は 5 の倍数の個数より多い)
$2006=3\cdot5^4+1\cdot5^3+1\cdot5+1$ より

$$\beta(2006)=\frac{1}{4}\{2006-(3+1+1+1)\}=500$$

この $\beta(2006)$ は 1 から 2006 までの自然数に含まれる因数 5 の個数の総和であるから，2006! を 10 進法で表示したとき，末尾に 500 個 0 が並ぶ。

§4　おわりに

階乗の桁数は非常に大きくなるが，コンピュータ・プログラミングなどで多桁計算をするときなどに使えるものである。また，末尾の 0 の個数は数学の問題で時々見かける。求めるアルゴリズムはわかっていても，それを数式で表したものは見ていない。ここでは，その数式で表すことを考えてみた。

《参考文献》

〔1〕　解析概論　高木貞治著　岩波書店

(福島県立橘高等学校)