センター試験確率問題の計算式の型による分類とその解法について

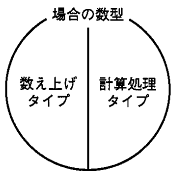
横山（よこやま）　政道（まさみち）

§1　はじめに

『確率』は，苦手にしている生徒達にとってテスト全体の出来に関わる重要な『問題』と私は位置づけています。易しい問題や得意な分野の問題であれば前半に解いて“流れ”を作るきっかけになるし，逆に問題の意味がなかなかつかめない問題であれば気があせり時間不足に陥る恐れも出てきます。そういうときは最後に回し，残った時間で勝負するほうが精神的時間的なマイナスは少ないように感じます。

さて，比較的問題の意味がつかみやすいセンターの確率問題の対応策として計算式による分類が有効であるように思われますので，ここに記述します。

確率の問題を計算式の型で大まかに２つに分類し，分子・分母とも別個にＰやＣ等の公式を使って解く「場合の数型」と分数どうしの掛け算で計算をする「分数掛け算型」の２通りの型を設定します。前者は，全事象をすべて書き並べて拾い上げるいわゆる数え上げタイプと計算処理タイプとに分かれ，どちらの型やタイプであるかを見極めると基本的な問題の場合，方針が決めやすくなるように思われます。因みにセンターで出題される問題は，表や樹形図等を利用して解く“数え上げ”が少なくありません。



§2　場合の数型

(1)　数え上げタイプ

［問１］　大小２個のさいころを投げ，出た目の数をそれぞれ a，b とし，２次関数 $y=x^2-\dfrac{b-2}{a}$ のグラフを C とする。

(1)　グラフ C と x 軸との共有点の個数の期待値を求めよ。

(2)　グラフ C と x 軸とが共有点をもち，かつ共有点がすべて整数となる確率を求めよ。

［解］　大小２個のさいころの目の出方は 36 通り

$$
\begin{aligned}
(a,\ b)&=(1,\ 1)\boxed{(1,\ 2)}\boxed{(1,\ 3)}(1,\ 4)(1,\ 5)\boxed{(1,\ 6)}\\
&=(2,\ 1)\boxed{(2,\ 2)}(2,\ 3)\boxed{(2,\ 4)}(2,\ 5)(2,\ 6)\\
&=(3,\ 1)\boxed{(3,\ 2)}(3,\ 3)(3,\ 4)\boxed{(3,\ 5)}(3,\ 6)\\
&=(4,\ 1)\boxed{(4,\ 2)}(4,\ 3)(4,\ 4)(4,\ 5)\boxed{(4,\ 6)}\\
&=(5,\ 1)\boxed{(5,\ 2)}(5,\ 3)(5,\ 4)(5,\ 5)(5,\ 6)\\
&=(6,\ 1)\boxed{(6,\ 2)}(6,\ 3)(6,\ 4)(6,\ 5)(6,\ 6)
\end{aligned}
$$

(1)　共有点の個数が１個になるのは，$b=2$ のときで確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，

２個になるのは $b>2$ のときで確率は $\dfrac{4\times6}{36}=\dfrac{2}{3}$

個数	0	1	2	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	1

表から

期待値は $\dfrac{1+8}{6}=\dfrac{3}{2}$（個）

(2)　$x^2=\dfrac{b-2}{a}$ において，右辺が平方数になるのは

上図の $\boxed{}$ 部分の 11 通り。よって $\dfrac{11}{36}$

(2) **計算処理タイプ**

［問２］ ３個のさいころを投げて出た目を小さい順に a，b，c $(a \leqq b \leqq c)$ とする。
(1) ３つの目が一致する確率
(2) ３つの目がすべて異なるとき，すなわち $a<b<c$ のとき $X=b$ とし，その他の場合は $X=0$ とする。$X=2$，$X=4$ となる確率と X の期待値を求めよ。

［解］ ３個のさいころの目の出方は 6^3 通りあり，どの目の出方の確率も同様に確からしく $\frac{1}{6^3}$ である。

(1) ３つの目が一致する場合の数は６通りあるから，

$$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

(2) $X=2$ のときは $1<2<c$

c の選び方は $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の中から１個とる組合せの数だけあるので，${}_4C_1$ 通りあり，順序を考慮すると全部で ${}_4C_1 \times 3!$ ある。

よって $\frac{{}_4C_1 \times 3!}{6^3}=\frac{1}{9}$

同様にして，$X=4$ のとき $\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$

Xのとりうる値の範囲は $X=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ であり，$X=3,\ 5$ のときをそれぞれ求めると $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{9}$

よって，期待値は

$$2 \times \frac{1}{9}+3 \times \frac{1}{6}+4 \times \frac{1}{6}+5 \times \frac{1}{9}=\frac{35}{18}$$

［問３］ 赤２個，白２個，黒２個の計６個の玉から a，b，c の３人が２個ずつ取り出すとき，次の確率を求めよ。
(1) ３人が同じ色の玉を取り出す確率
(2) ３人とも違う色の玉を取り出す確率

［解］ ６個の玉が異なるものと考えて，すべての場合の数は

${}_6C_2 \times {}_4C_2=15 \times 6=90$ (通り)

どの取り出し方も同じ確率で $\frac{1}{90}$ である。

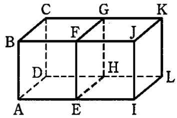
(1) 赤２個，白２個，黒２個ずつ取り出す方法は
　１通り
３人の分け方も考慮して全部で $1 \times 3!$ 通り。
よって，確率は $\frac{3!}{15 \times 6}=\frac{1}{15}$

(2) ３人とも異なる色の玉を取り出すのは
赤白，赤黒，白黒　の場合で
$({}_2C_1 \times {}_2C_1) \times ({}_1C_1 \times {}_2C_1) \times 1$
$=4 \times 2 \times 1=8$

よって，求める確率は $\frac{8 \times 3!}{90}=\frac{8}{15}$

§３ 分数掛け算型

［問４］ 合同な２つの立方体を貼り合わせて図のような直方体を作った。動点Ｐはもとの立方体の辺上だけを通って，最短経路でＡからＫまで移動するものとする。ただし，動点Ｐは各分岐点において可能な進路を等確率で選んで進むものとする。



動点ＰがＡを出発すると同時に，動点Ｑが点Ｋを出発して，Ｐと同じ速さ，同じ規則でＡまでの最短経路を進むとき，ＰとＱが出会う確率を求めよ。

［解］ ＰとＱが出会う点は，Ｃ，Ｆ，Ｈ，Ｉのいずれかである。このとき，ＰとＱがある点Ｚで出会う確率を $P(\mathrm{Z})$ とすると

$$P(\mathrm{C})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

$$P(\mathrm{F})=\frac{5}{18}\cdot\frac{5}{18}=\frac{25}{324}$$

$$P(\mathrm{H})=\frac{5}{18}\cdot\frac{5}{18}=\frac{25}{324}$$

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

ゆえに，求める確率は

$$2\left(\frac{1}{27}+\frac{25}{324}\right)=\frac{37}{162}$$

(説明) 例えば $P(\mathrm{C})$ を求める。
点ＰがＣを通ってＫへ行く確率は
Ａ→Ｂ→Ｃ→Ｋ と Ａ→Ｄ→Ｃ→Ｋ
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1=\frac{1}{6}$　$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1=\frac{1}{6}$ から

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

点ＱがＣを通ってＡへ行く確率は
Ｋ→Ｇ→Ｃ→Ａ

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

よって　$P(\mathrm{C})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$

次に，$P(\mathrm{F})$ を求める。

点PがFを通ってKへ行く確率は

A→B→F→K と A→E→F→K

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$　　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ から

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$$

点QがFを通ってAへ行く確率は

K→G→F→A と K→J→F→A

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$　　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ から

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$$

よって　$P(\mathrm{F})=\frac{5}{18}\times\frac{5}{18}=\frac{25}{324}$

> ［問５］ 数直線上に原点Oから出発する動点Pがある。点Pは，硬貨を投げて表が出れば $+3$ だけ移動し，裏が出れば -2 だけ移動する。このとき，３回の移動後の点Pの座標の期待値を求めよ。

［解］ 表が n 回出るとすると，裏は $3-n$ 回で表され，x 座標は，$3n-2(3-n)=5n-6$

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ を代入して，x のとりうる範囲は

$x=-6,\ -1,\ 4,\ 9$

それぞれの座標にある点Pの確率は

$x=-6$ のとき　$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$x=-1$ のとき　${}_3C_1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

$x=4$ のとき　${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

$x=9$ のとき　$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

よって　$-6\times\frac{1}{8}-1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

> ［問６］ さいころを４回投げて，１の目がちょうど２回出る確率を求めよ。

［解］ ${}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216}$

［別解］ ４回のうち２回だけ１の目が出る出方は ${}_4C_2$ 通り。その各々について，残りの２回に１以外の目が出る出方は 5^2 通りある。

よって　$\frac{{}_4C_2\times5^2}{6^4}=\frac{25}{216}$

§4　おわりに

確率の問題は，教科書や参考書等では加法定理，乗法定理，独立試行，反復試行のように，使う定理や試行等で分類されていたりジャンケン問題やさいころ，硬貨問題のように種類別に分類されています。本稿では，確率アレルギーの生徒達が自然と問題に少しでも取り組みやすくなるように計算の形から分類してみました。その利点としては，場合の数型か分数の積型かを最初に意識させることによりスムーズに問題に入っていける点と，全事象や乗法定理等の意味や活用法，確率の普遍原理である“同様に確からしい”ことの理解も促される点があるように思われます。ところで，教える側にとって配慮すべきことの一つに，生徒の自由な発想を大切にしていくことがあります。例えば，［問６］の問題を別解のように考える生徒も当然いると思います。パターン化に固執すると，生徒達の自由な発想の芽を摘んでしまうことがあるかもしれません。その点を十分考慮したうえで，この分類方法は有効であると考えます。以上，センターレベルの問題においては，これで対応できそうな気がしますが，ご意見，ご感想等いただけると幸いです。

《参考文献》

〔１〕 2005　センター試験　実戦パッケージ問題　数学Ⅰ・数学A　駿台文庫

〔２〕 2005　数学Ⅰ・A＋Ⅱ・Bプレノート　大学入試センター試験対策・直前実践編　数研出版

〔３〕 パワーマックスシリーズ センター試験対応模試数学Ⅰ・A，ⅡB×8(改訂版)
第３回　数学Ⅰ・A第１問［２］　Z会出版

〔４〕 2005　センター試験問題　数学Ⅰ・A

（宮崎県立宮崎南高等学校）