分数式 $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$ の値は整数

さかとも　しげる
坂本　茂

§0．はじめに

表題の分数式のみが与えられたとき，整数 n，r $(n\geqq r\geqq 1)$ に対するすべての場合に，これが整数値となるのは自明なことではない。組合せの論理を介さずに，この分数式が整数値を取ることを示したい。

§1．問題提起

異なる n 個のものから r 個取る組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ が正の整数であることは当然である。この計算式は，異なる n 個のものから r 個取って並べるときの順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ が

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

であり，次式が成り立たなければならないことから求められている。

$${}_n\mathrm{P}_r={}_n\mathrm{C}_r\cdot{}_r\mathrm{P}_r$$

ここで，階乗記号 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ によって次のように表される。

$${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!},\quad {}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{{}_r\mathrm{P}_r}=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

すなわち，${}_n\mathrm{C}_r$ は次式で与えられている。

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

この左辺が整数だから右辺の分数式も同じ整数となる訳であり，このことから右辺を計算して分数のままで終わることはない。今までに生徒から右辺の分数を計算して，結果がなぜ整数になるのかについて，直接の説明を求められた事はないし疑問に思ったということを聞いた事もない。しかし，私は組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ が整数だからという説明ではなく，右辺の分数が約分されて整数となることの理由について，以前から気にかけていた。順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ や階乗 $n!$ が整数であることはその式から明らかであるが，組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ の分数式自身が整数値を取ることの直接的な証明が要求されているのである。

§2．整数であることの直接的な証明

$n>r>0$ としてよいが，$m=n-r$ とおけば

$${}_n\mathrm{C}_r={}_{m+r}\mathrm{C}_r={}_{m+r}\mathrm{C}_m$$

である。正の整数 m，r に対して

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{(m+r)!}{m!\cdot r!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m+r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

が整数であることを示せばよい。

以後ガウス記号 $[a]$ を用いるが，これは a を超えない最大の整数を表す。分母の素因数分解において，ある素数を p とすると，1，2，3，…，m の中に素数 p の約数は

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \cdots,\ m_1p$$

だけあり，$m_1=\left[\dfrac{m}{p}\right]$ 個 である。また p^2 の約数は $m_2=\left[\dfrac{m_1}{p}\right]$ 個 で，

$$p^2,\ 2p^2,\ 3p^2,\ \cdots,\ m_2p^2\quad (m_2<m_1)$$

だけあり，p^3 の約数は $m_3=\left[\dfrac{m_2}{p}\right]$ 個 である。このようにして $m!$ を素因数分解するとき素数 p の個数の総数は次のようになる。

$$m_1+m_2+m_3+\cdots,\quad m_{k+1}=\left[\frac{m_k}{p}\right]<m_k$$

同様に 1，2，3，…，r の中の素数 p の個数の総数は

$$r_1+r_2+r_3+\cdots,\quad r_1=\left[\frac{r}{p}\right],\quad r_{k+1}=\left[\frac{r_k}{p}\right]<r_k$$

である。また，分子の 1，2，3，…，$m+r$ には素数 p の個数の総数が

$$n_1+n_2+n_3+\cdots,\quad n_1=\left[\frac{n}{p}\right],\quad n_{k+1}=\left[\frac{n_k}{p}\right]<n_k$$

個ある。ここで $n=m+r$ である。

一般に，$[\alpha]+[\beta]\leqq[\alpha+\beta]$ である。なぜならば，k，l を整数として

$$\alpha=k+a,\ 0\leqq a<1\ ;\ \beta=l+b,\ 0\leqq b<1$$

とおいたとき $0\leqq a+b<2$ であるから

$$[\alpha+\beta]-([\alpha]+[\beta])$$

は0または1となるからである。したがって

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{r}{p}\right]\leqq\left[\frac{m+r}{p}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]$$

が成り立ち，$m_1+r_1\leqq n_1$ である。これにより更に

$$\left[\frac{m_1}{p}\right]+\left[\frac{r_1}{p}\right]\leqq\left[\frac{m_1+r_1}{p}\right]\leqq\left[\frac{n_1}{p}\right]$$

だから $m_2+r_2\leqq n_2$ となる。以下同様にして

$$m_k+r_k\leqq n_k$$

がいえ，次式を得る。

$$(m_1+m_2+m_3+\cdots)+(r_1+r_2+r_3+\cdots)$$
$$\leqq n_1+n_2+n_3+\cdots$$

以上のことから分母と分子をそれぞれ素因数分解すれば，素数 p の次数は分母よりも分子の方が高くなる。これはすべての素数について言えることだから，分母の素数はすべて約分されてしまう。よって $\frac{n!}{m!r!}$ は整数であり分数式

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

は正の整数値をとる。

§3. 具体例による裏付け

ここで，例を1つ考えてみるのも良いと思う。$m=11$，$r=9$ $(n=20)$ の場合

$$\left[\frac{20}{2}\right]=10,\ \left[\frac{10}{2}\right]=5,\ \left[\frac{5}{2}\right]=2,\ \left[\frac{2}{2}\right]=1$$

であるから20! の素因数分解において素数2の個数は $10+5+2+1=18$ である。同様にして11! の素因数分解では素数2の個数は $5+2+1=8$，また9! の素因数分解では $4+2+1=7$ である。したがって $\frac{20!}{11!9!}$ を約分すれば個数の差である $18-8-7=3$ (個) の2が分子に残る。素数3，5，7，… についても調べて次の表を得る。

素数	2	3	5	7	11	13	17	19	23	…
20!	18	8	4	2	1	1	1	1	0	…
11!	8	4	2	1	1	0	0	0	0	…
9!	7	4	1	1	0	0	0	0	0	…
個数の差	3	0	1	0	0	1	1	1	0	…

したがって

$$\frac{20!}{11!9!}=2^3\cdot3^0\cdot5^1\cdot7^0\cdot11^0\cdot13^1\cdot17^1\cdot19^1\cdot23^0\cdots$$
$$=8\times5\times13\times17\times19=167960$$

これは整数であることの直接的な証明に基づいた ${}_{20}C_9=167960$ の計算手順である。

§4. 同じものを含む順列

組合せは同じものを含む順列と考えられ，${}_nC_r$ は n 個中同じものが r 個，$n-r$ 個ずつ含まれた n 個のものの順列である。一般に n 個中同じものがm個，r 個，s 個，…，w 個ずつ含まれた $n=m+r+s+\cdots+w$ 個 の順列は

$$\frac{(m+r+s+\cdots+w)!}{m!r!s!\cdots w!}$$

によって計算されると考えられる。

この分数式が整数となることも同様に示される。ある整数 p に対して

$$\left[\frac{n}{p}\right]\geqq\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{r}{p}\right]+\left[\frac{s}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{w}{p}\right]$$

が成り立ち，さらに

$$\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right]\geqq\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right]+\left[\frac{\left[\frac{r}{p}\right]}{p}\right]+\left[\frac{\left[\frac{s}{p}\right]}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{\left[\frac{w}{p}\right]}{p}\right]$$

であり，以下同様に続く。したがって分母と分子を整数 p で割ってゆけば，分母が割り切れなくなっても分子はまだ p で割り切れる可能性がある。このことは整数 p をいろいろな素数として考えたとき，分数を約分して分母が1となることを示している。

なお，${}_nC_r$ が正の整数であることが証明されているので，この分数式は

$$\frac{(m+r+s+\cdots+w)!}{m!r!s!\cdots w!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{r!s!\cdots w!}$$
$$={}_nC_m\cdot\frac{(r+s+\cdots+w)!}{r!s!\cdots w!}=\cdots$$
$$={}_nC_m\cdot{}_{n-m}C_r\cdot{}_{n-m-r}C_s\cdots{}_{v+w}C_v\cdot{}_wC_w$$

と書き表すことにより正の整数であることが示される。

§5. 数学的帰納法による証明

漸化式を導いてから数学的帰納法によって証明してみよう。

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots2\cdot1}\quad(n\geqq r\geqq1)$$

は，右辺の分数式によって記号 ${}_nC_r$ で表される左辺が定義されるものとする。したがってこの分数式 ${}_nC_r$ が正の整数となることを示すことである。これは階乗記号！を用いて

$${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\quad(n\geqq r\geqq 0)$$

と表すことができる。$0!=1$ と定義すると $n\geqq r\geqq 0$ である整数 n，r において分数式 ${}_nC_r$ は定義されて，たとえば ${}_nC_0=1$ となる。

次の漸化式は，r 個のうちである特定の1つが選ばれるか，あるいは選ばれないかという本来の組合せ的な考えから通常の教科書で書かれている。

$${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$

しかし，ここでは分数式 ${}_nC_r$ が組合せとは何の関係もなく，これは上の定義に従って示されなければならない。すなわち分数式 ${}_nC_r$ が次のように

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,r!}+\frac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}$$

と変形されて，分数式 ${}_nC_r$ の定義により上記の漸化式の成立が示されるのである。漸化式が成り立つのは

$$n>r>0\quad(n\geqq 2)$$

であることを忘れてはならない。

定義式から $n\geqq 0$ で ${}_nC_0$，${}_nC_n$ は整数であって，これらはすべて1である。これを境界値と呼んで分数式 ${}_nC_r\,(n\geqq r\geqq 0)$ が正の整数であることを以下で示そう。

(i)　$n=0$，1 のときは境界値より成り立ち

$${}_0C_0={}_1C_0={}_1C_1=1$$

(ii)　$n=k$ で成り立つとすると ${}_kC_r\,(k\geqq r\geqq 0)$ は正の整数である。このとき漸化式から ${}_{k+1}C_r$ は $k\geqq r>0$ で正の整数となる。境界値条件より ${}_{k+1}C_{k+1}$，${}_{k+1}C_0$ が共に整数1であり，$k+1\geqq r\geqq 0$ においても ${}_{k+1}C_r$ は正の整数となり $n=k+1$ のときも成り立つ。

したがって，数学的帰納法により，$n\geqq r\geqq 0$ であるすべての整数 n，r に対して分数式 ${}_nC_r$ が正の整数となることが証明された。しかし証明に使われた漸化式の存在そのものは，組合せの考えから示唆されたものと言える。

§6. 境界条件と漸化式

上記の関係式

境界値：${}_nC_0={}_nC_n=1\quad(n\geqq 0)$

漸化式：${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}\quad(n>r>0)$

によって整数 ${}_nC_r$ が $n\geqq r\geqq 0$ で一意的に定義される。これはいわゆるパスカル (B. Pascal) の三角形が形成される基礎となる関係式である。

図のように ${}_nC_r$ を左上が頂点 ${}_0C_0$ とする直角三角形で表すと，漸化式より ${}_nC_r$ はその左側と上側とが加えられて得られる。したがって直角三角形の二辺に当たる左側境界辺 ${}_kC_0\,(1\leqq k\leqq n-r)$ と上側境界辺 ${}_kC_k\,(1\leqq k\leqq r)$ から出発して ${}_nC_r$ は得られる。すなわち，

左側境界辺：${}_1C_0$，${}_2C_0$，…，${}_{n-r}C_0$

上側境界辺：${}_1C_1$，${}_2C_2$，…，${}_rC_r$

からであるが，これらの境界値条件はすべて1である。

したがって ${}_nC_r$ はすべて正の整数であることが図示される。

${}_0C_0$	${}_1C_1$	${}_2C_2$	${}_3C_3$	${}_4C_4$	1	1	1	1	…
${}_1C_0$	${}_2C_1$	${}_3C_2$	${}_4C_3$	*	1	2	3	4	…
${}_2C_0$	${}_3C_1$	${}_4C_2$	*	*	1	3	6	10	…
${}_3C_0$	${}_4C_1$	*	*	*	1	4	10	20	…
${}_4C_0$	*	*	${}_7C_3$	*	1	5	15	35	…
*	*	*	*	*	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

図では左辺と上辺から次第に加えられてきて ${}_7C_3$ が正の整数35となることを示している。

境界値条件と漸化式の2つの条件から，よく知られている次式が成り立つことを証明しよう。

$${}_nC_{n-r}={}_nC_r\quad(n\geqq r\geqq 0)$$

(i)　$r=0$，$r=n$ のとき成り立つから，$n=1$ のとき $r=0$，1 で成立する。

(ii)　$n=k-1$ で成り立つとすれば

$${}_{k-1}C_r={}_{k-1}C_{k-1-r}$$

が $k-1\geqq r\geqq 0$ で成り立つ。すなわち $k>r\geqq 0$ で成り立つ。このとき $n=k$ のときは，漸化式から

$$\begin{aligned}{}_kC_{k-r}&={}_{k-1}C_{k-r}+{}_{k-1}C_{k-r-1}\\&={}_{k-1}C_{r-1}+{}_{k-1}C_r={}_kC_r\end{aligned}$$

が得られ，これが成り立つ条件は $k>k-r>0$ より，$k>r>0$ である。また $r=0$，k でも成り立つので $k\geqq r\geqq 0$ で成り立つ。

したがって，数学的帰納法によって $n\geqq r\geqq 0$ のとき ${}_nC_{n-r}={}_nC_r$ であることが証明された。

上の図はまさに碁盤の目の最短経路の数を表している。${}_nC_r$ の分数式を境界値条件と漸化式とから純粋に導き出すことが残された課題である。

（東京都立秋留台高等学校）