# 積分計算の興味ある具体例

吉田（よしだ）　富士雄（ふじお）

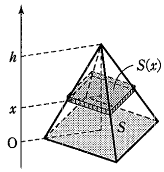
## §0　はじめに

高校数学の積分は面積，体積を扱うことを主としている。残念ながら，積分つまり定積分の Riemann 和的な意味づけを教科書では十分に行うことはできない。(速度)×(時間)=(変位)，(密度)×(体積)=(質量)，(質量)×(高さ)=(位置エネルギー）など，積分計算の例として興味深いものが多いにもかかわらず残念なことである。ここでは，具体的な定積分で表現できる量と，面積・体積に比べて扱われることがほとんどない回転体の表面積について紹介してみたい。

## §1　位置エネルギー

> 密度 $\rho$ の石で造られた底面積 $S$，高さ $h$ のピラミッドのもつ位置エネルギー $E$ を求めよ。

(解答)




$S(x):S=(h-x)^2:h^2$

$$S(x)=\frac{(h-x)^2}{h^2}S \quad \cdots ①$$

厚さ $\Delta x$ の直方体の質量は

$$\Delta M=\rho S(x)\Delta x$$

この直方体のもつ位置エネルギーは

$$\Delta E=\Delta Mgx=\rho\times\frac{(h-x)^2}{h^2}S\times gx\times\Delta x$$

したがって

$$E=\int_0^h\frac{\rho Sg}{h^2}(h-x)^2x\,dx$$

$$=\frac{\rho Sg}{h^2}\left[\frac{1}{2}h^2x^2-\frac{2}{3}hx^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^h$$

$$=\rho Sgh^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}\rho Sgh^2 \quad \text{答}$$

(解説)

$E=\left(\frac{1}{3}\rho Sh\right)\times g\times\frac{1}{4}h$ と式変形する。

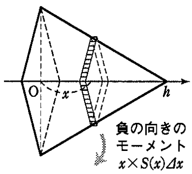
ピラミッドの質量を $M$ とすれば

$E=Mg\times\frac{1}{4}h$ ……② が成り立つ。

簡単のため密度1として，モーメントのつり合いを考えると，ピラミッドの重心 $l$ は

$$\int_0^h xS(x)\,dx=l\int_0^h S(x)\,dx$$

を満たす。




①を代入して

$$\int_0^h\frac{S}{h^2}(h-x)^2x\,dx$$

$$=l\int_0^h\frac{S}{h^2}(h-x)^2dx \text{ から}$$

ただちに，$l=\frac{1}{4}h$ を得る。

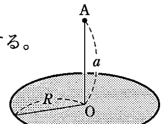
重心 $h_0=\frac{1}{4}h$ とすれば，②は　$E=Mgh_0$

つまり，重心に全質量があると考えることもできる。

## §2　万有引力の大きさ

> 半径 $R$，質量 $M$ の十分に薄い一様な円盤が，円盤の中心上の高さ $a$ の位置にある質量 $m$ の小物体におよぼす万有引力の大きさ $F$ を求めよ。

(解答)

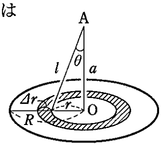



図の輪の部分の質量を $\Delta M$ とする。

$$M:\Delta M=\pi R^2:2\pi r\Delta r$$

$$\Delta M=M\times\frac{2\pi r}{\pi R^2}\times\Delta r$$

この輪が小物体におよぼす引力は




$$\Delta f=G\frac{m\Delta M}{l^2}\cos\theta$$

($G$ は万有引力定数，図の水平方向の力の成分は相殺されることに注意)

$$\Delta f=\frac{G}{l^2}mM\times\frac{2r}{R^2}\cos\theta\,\Delta r$$

$$=\frac{GmM}{a^2+r^2}\times\frac{2r}{R^2}\times\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\Delta r$$

したがって

$$f=\int_0^R \frac{aGmM}{R^2}\times\frac{2r}{(a^2+r^2)\sqrt{a^2+r^2}}dr$$

$$=\frac{aGmM}{R^2}\left[-2(a^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R$$

$$f=\frac{2aGmM}{R^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$ 答

（解説）

ここで $R\to 0$ としてみる。

$$\lim_{R\to 0}\frac{2aGmM}{R^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

$$=\lim_{R\to 0}\frac{2aGmM}{R^2}\times\frac{\sqrt{a^2+R^2}-a}{a\sqrt{a^2+R^2}}$$

$$=\lim_{R\to 0}\frac{2aGmM}{R^2}\times\frac{(a^2+R^2)-a^2}{a\sqrt{a^2+R^2}(\sqrt{a^2+R^2}+a)}$$

$$=\lim_{R\to 0}2GmM\times\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}(\sqrt{a^2+R^2}+a)}$$

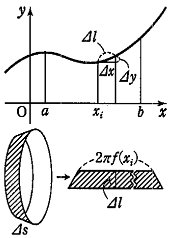
$$=2GmM\times\frac{1}{a\times 2a}=G\frac{mM}{a^2}$$ （万有引力の法則）

に当然一致する。

## §3　回転体の表面積

> $[a,\ b]$ で $f(x)\geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ を $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の表面積は
> $S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ であることを示せ。

（解答）




$$\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Delta S\fallingdotseq 2\pi f(x_i)\Delta l$$

$$=2\pi f(x_i)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=2\pi f(x_i)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

答

**例　半径 $r$ の球面の表面積**

$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$　$[-r,\ r]$ とする。

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

表面積を $S$ とすると

$$S=\int_{-r}^{r}2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx$$

$$=\int_{-r}^{r}2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx$$

$$=\int_{-r}^{r}2\pi r\,dx=\Big[2\pi rx\Big]_{-r}^{r}=4\pi r^2$$ 答

**例　サイクロイド曲線を回転させたときの表面積**

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ とする。

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

ここで，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とすれば

$$S=2\pi\int_{t_0}^{t_1}g(t)\sqrt{1+\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)^2}f'(t)\,dt$$

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\times\sqrt{1+\left\{\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right\}^2}\times a(1-\cos t)\,dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\times\sqrt{\frac{2(1-\cos t)}{(1-\cos t)^2}}dt$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\times\frac{1}{\sqrt{1-\cos t}}dt$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt$$ $\left(\frac{t}{2}=\theta\ とおく\right)$

$$=8\pi a^2\int_0^{\pi}(\sin^3\theta)\times 2d\theta$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=16\pi a^2\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2$$ 答

放物線　$f(x)=\sqrt{x}$　$[0,\ a]$；

懸垂線　$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　$[0,\ a]$；

アステロイド　$x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$；

$f(x)=\sin x$；$f(x)=e^x$ などの回転体の表面積も手頃な計算で求めることができる。

**《参考文献》**


〔１〕　数学Ⅲ　文部省検定済教科書　三省堂

〔２〕　数学Ⅲ　教授資料　三省堂



（埼玉県 城北埼玉中学・高等学校）