「三角関数の恒等式」についての一考察

米江（よねえ）　慶典（よしのり）

§0　はじめに

高等学校における「恒等式」の学習内容は比較的軽く扱われています。特に，「三角関数の恒等式」についてはほとんど記述がありません。ここで，少し考えてみたいと思います。

§1　準備

まずは，定義と基礎的な定理を準備します。特に，定理1は直観的に明らかです。

(定義)　任意の実数 x に対して，整式 $P(x)$ と整式 $Q(x)$ が常に $P(x)=Q(x)$ を満たすとき，
「整式 $P(x)$ と整式 $Q(x)$ は恒等的に等しい」
あるいは「$P(x)=Q(x)$ は x についての恒等式」
といい，$P(x)\equiv Q(x)$ とかく。

当然のことですが，定義には，$Q(x)$ が0の場合も含んでいます。

(定理1)
(Ｉ)　$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$
　は x についての恒等式である。
　$\Longleftrightarrow$ $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$
(II)　$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$
　　$=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$
　は x についての恒等式である。
　$\Longleftrightarrow$ $a_n=b_n$，$a_{n-1}=b_{n-1}$，…，$a_0=b_0$

(証明)
(Ｉ)　($\Rightarrow$) a_1，a_2，…，a_n のうち少なくとも一つが0でないとすると

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

を満たす x の値は n 個以下となり，

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

は x についての恒等式ではない。(仮定に矛盾)
よって，$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$　したがって，$a_0=0$
($\Leftarrow$) 明らか。

(II)　題意の関係式は

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)=0$$

と同値な式であるので，(Ｉ)から証明できる。終

(定理2)　ともに n 次以下の整式 $P(x)$，$Q(x)$ について，等式 $P(x)=Q(x)$ が異なる $(n+1)$ 個の x の値に対して成り立つならば，$P(x)=Q(x)$ は x についての恒等式である。

(証明)
$F(x)=P(x)-Q(x)$ とおくと，これは n 次以下の整式である。
仮定より，$P(x_i)=Q(x_i)$ $(1\leqq i\leqq n+1)$ とする。
ただし，$i\neq j$ のとき $x_i\neq x_j$ とする。
$F(x_1)=0$ より，因数定理から $F(x)$ は $x-x_1$ で割り切れる。
つまり，$F(x)=(x-x_1)A_1(x)$
ただし，$A_1(x)$ は $(n-1)$ 次以下の整式である。
ここで $F(x_2)=0$ より，$(x_2-x_1)A_1(x_2)=0$ となる。
$x_1\neq x_2$ から $A_1(x_2)=0$
先ほどと同様に　$A_1(x)=(x-x_2)A_2(x)$
ただし，$A_2(x)$ は $(n-2)$ 次以下の整式である。
以下同様に繰り返していけば，

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)A_n(x)$$

ただし，$A_n(x)$ は定数である。
ここで，$A_n(x)$ は定数なので，改めて k とおく。
すなわち，

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\cdot k$$

今，$F(x_{n+1})=0$ より，

$$(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)\cdot k=0$$

ここで，$x_{n+1}\neq x_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ より，$k=0$
したがって，$F(x)\equiv 0$ となり，$P(x)\equiv Q(x)$　終

定理2の証明方法を参考にすれば，次の 系 が直ちに得られる。