楕円を描きケプラーの法則や円錐曲線について考える

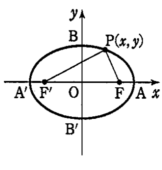
富永　雅（とみなが　まさる）

§1　はじめに

一般に，高等学校において数学Cの授業を履修している生徒は，いくつかの選択科目の中からその科目を選ぶ（全員が履修しない点は問題だが，一方で，学校によっては少人数でその授業が行われるという利点もある）。このような生徒は，それまでの数学（数学Ⅰ，Ⅱ，AそしてB）をそれなりに理解し，大学受験のためにそれを必要とする意識を持っていることもあって，数学の学習に対する取り組みには前向きなものがある。しかしながら残念なことに，そこには大学受験のためという考えが大きく働いており，どの程度数学そのものに関心が向けられているかということになると少々疑問な点がある。

ところで，今回数学C『2次曲線（楕円）』の授業から派生して数学そのものに関心を持つ生徒とともに，ある活動を行うことになった。そこで本稿では，その活動に数学の教科書では学ぶことの少ない科学的事実や，数学史的な内容を加えて展開できる実践例についてまとめることにする。対象となったのは，数学Cの履修者の中でも，数学それ自身に興味関心を示している生徒たちで，学校数学だけではなく，例えば，市販されている数学関係の文庫本を好んで読むような生徒たちである。

§2　大楕円を描く



2次曲線で学習する放物線，楕円，双曲線のうち，楕円は，定義に沿って描くことを考えたときもっとも描き易い対象である。教科書では，定められた2定点を押しピンで固定し，それらの間を糸で結ぶことにより楕円を描く様子が紹介されている。この定義を紹介すると，たいていの生徒は「そうなるんだ」と思い納得する（させられる）が，時には「楕円を描きたい」と言う生徒が現れる年度もある。

実は今回担当したのは，「楕円を描きたい」と言う学年であった。しかしながら，進度等々，教師側の都合もあり各自で描いておくようにと指示した。ところが，先に触れたように数学そのものに大変強い関心を持つ生徒がいる学年であるから，このことはそれだけでは収まらない。実は，一学期が終了した夏期補習の最中（7月終わり）に運動場で描くことになった。2004年の夏は異常気象による猛暑！この時期に運動場で数学をするとは思ってもみなかったが「数学の夢の1つを叶えて欲しい」と言われればこちらもその気にさせられる。運動場を使って図形を描く許可を得，運動場のトラックにロープを張るときに使う3つの杭（焦点2つと軌跡を印すために用いる）と何メートルもある虎縞ロープで楕円を描くこととなった。しかし，授業では簡単に描けるかのようには言ってはいたが，実際に運動場で描くとなるとなかなかそのようにはいかない。ロープはピンと張れず，描いている途中でたるみ，また，人の手で支えた杭の先端を固定させるのも難しい。更になんと言っても猛暑。土が乾いていて，杭で地面に曲線を描けども図形がはっきり見えてこない。石灰を使うわけにもいかないので，焦点に当たる杭の場所や杭で描かれた図形である楕円をペットボトルに入れた水で何回もなぞることになった。結果としての出来ばえは，苦労して描いたかいあってまずまず良好。言い出した生徒自身も自分で描いた楕円に満足いったようであった。また，これら一連の様子を見ていた他学年の生徒も数学を運動場ですると あって，興味深げにその様子を見ていた（まさか，数学Cでは運動場で実習があるんだ，とは思ってい

ないとは思うが，少しでも他学年の生徒に関心を持ってもらえたら幸いである)。

せっかく巨大な楕円を描きはしたが，それだけでこの活動を終えるのは惜しいことである。とはいうものの，高校数学の教科書だけを見ていたのではこの楕円の応用範囲は限られている。用いたロープ部分の長さが長軸の長さと一致することや，短軸と楕円との交点を求めるといった類のことぐらいになろう。そこで，発展的なことではあるが，楕円の1つの焦点から発した光線が楕円上で反射し他方の焦点に到達するという性質を利用し，その実験を試みることが考えられる。板とボールを用意し，板を接線に見立てて，焦点から投げたボールが板(接点)で跳ね返る様子を観察するのである。運動場でのことなので，凹凸があったり，楕円が正確であるとはいえない上に，板(接線)の位置も必ずしも適切な場所には置けない等，少々困難な点もあるが，生徒にはインパクトもあり，記憶に残る授業になる。

§3　ケプラーの法則を取り入れる

描いた楕円を見ていて，思い出される典型的な科学的事実のひとつにケプラーの法則がある。ここではこのことについて触れることにする。コペルニクスの地動説を聞く機会に恵まれ，師であるティコ・ブラーエが残した惑星に関する膨大な観測データを元にしてケプラーは，次の3法則を発見した：

【第1法則】 各惑星の運動の軌道は楕円であり，太陽はこの楕円の焦点に位置している。

【第2法則】 太陽から惑星に至る動径は，等しい時間内に等しい面積を描く。

【第3法則】 各惑星について，公転周期の2乗は公転軌道の長軸半径の3乗に比例する。

ニュートンの『万有引力』にも影響を与えたこのケプラーの法則は，高等学校では理科でも学習する。第3法則については，描いた楕円上で扱うことは難しいかもしれない。しかし，残りの2つの法則，焦点の位置に太陽があるとしたとき，軌跡である楕円を惑星の軌道として見なせること(第1法則)や，楕円上，特に近日点や遠日点付近で太陽から受ける引力を考慮しつつ面積速度が一定になるとはどういうことなのかを考えること(第2法則)のために，描いた楕円の焦点上に立たせたり，その曲線上を歩かせて惑星の軌道の様子を観察させたりすることは，学習の強化につながると考えられる。

尚，興味深いことに，太陽の周りでの天体の軌道は，楕円，放物線，双曲線の3種類に限られていることが万有引力の法則を利用して証明されていて，放物線や双曲線の軌道に関してもケプラーの第2法則が成り立つことが知られている。

§4　アポロニウスの円錐曲線
（定期考査への出題から）

2次曲線はすべて，直円錐の平面による切り口の曲線として表せることは，教科書でも触れられている。ここでは，アポロニウスにより導かれたこの事実とその周辺について簡単に触れる。

アポロニウス(200B.C.頃)は，ギリシア最大の幾何学者であり，ユークリッドによる数学の影響を受けたといわれている。彼の最大の成果の一つが円錐を平面で切ったとき円錐と平面とが交わって出来る曲線，つまり円錐曲線を明らかにしたことである。尚，彼の著作『円錐曲線論』は，8巻中7巻が現在に伝わっていて，楕円(ellipse)，放物線(parabola)，双曲線(hyperbola)という命名も彼によるものである。また後になって，ケプラー(1571-1630)やニュートンが天体の軌道の計算を試みたとき，彼の理論が役立つことになる。前節でも触れたように，惑星の軌道が古代にアポロニウスが研究した円錐曲線に当てはまる，というのは大きなことで，彼の研究した円錐の切り口の名称が1800年を経て天体運動の曲線としてよみがえったのである。(参考文献の〔2〕参照)

このように意味ある円錐曲線について授業で触れるだけではなく，定期考査でも単純ではあるが次のようにして出題した：

[問題1]　次の下線部に適当な語を入れよ。

図1は2つの直円錐を底面が平行になるように頂点で接しさせたものである。図2は，図1の下側の円錐において，頂点Aと底面の円の直径BCとで作られる平面図形を表している。いま，底面の円の中心をO，$\angle BAO=\alpha$ とおき，図2のように図1を，線分AC上の点Dを通る平面で切断してOAと切り口の平面のなす角度を θ とする。このとき，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\theta=\alpha$ そして $0<\theta<\alpha$ の各場合について切り

口が表す図形はそれぞれ①，②，③そして④となる。

図1

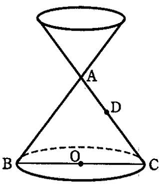
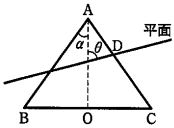


図2



上記問題の解答は，順に ①円，②楕円，③放物線，④双曲線 となる。そもそも，線形代数学の議論でも知られているように2次曲線は，楕円，双曲線，放物線で分類し尽くされることが知られていて，純粋数学的にも意味ある興味深い出題であると考えている（線形代数学で2次曲線を分類すると，細かくは，直線や点，空集合も現れる。円錐曲線でも母線の交点Aを通る平面で切断したときに直線や点が現れる)。また，加えて楕円（ellipse)，放物線（parabola)，双曲線（hyperbola）は各々，不足する，一致する，超過する，が原義で，円錐の母線に関して切り口の角度が持つ性質に対応していると考えることが出来る。このような話題は，生徒への興味関心につながると考えられる。

更に，同じく定期考査において，次のような問題も出題した：

[問題2] 定点Fと Fを通らない定直線 g からの距離の比が e：1となる点Pの軌跡について，次の下線部に適当な語を入れよ。

点Pの軌跡が表す図形は，$0<e<1$ のとき①，$e=1$ のとき②，$e>1$ のとき③となる。また，それぞれの場合において，点Fは④，e は⑤，直線 g は⑥と呼ばれている。

上記問題の解答は，順に ①楕円，②放物線，③双曲線，④焦点，⑤離心率，⑥準線 となる。特に準線は，先の円錐を用いて表すことも出来る。(参考文献の〔1〕参照)

§5 おわりに

本稿では，数学Cを指導する中で，数学に関心を持つ生徒たちとともに行った実践と発展的な学習について述べてきた。しかしながら，大楕円を描くような実践は学校数学を嫌う生徒たちも興味を持つことが出来る内容であると考えられる。しかもそれが科学的事実や数学史的な事柄とつながるとなると興味はより深まることになろう。そもそも学校数学で扱われる学習内容は，人類が発展を遂げる中で必要とされて生み出された事柄であり，そこには数学と科学との密接な関係をみることができる。その意味で大いに関心の対象となりうるものである。それにもかかわらず数学教育サイドから見たとき，現場において数学と科学の乖離は著しくなってきている。このような不自然な状況は打開させなければならず，そのためにも，数学教師自身が，大学受験に踊らされるのではなく，論理立てられて構成されている数学という学問への関心が高められるよう生徒の方向付けを行うことが大切であり，そのためにも日々，力量を高めなければならない。今後もこのような実践を大切にしたいと考える。

最後に，数学をする者としては，数学に関心を持つ生徒には，やはり何かしら数学に関する方向（理学部数学科ということになろうか）に進んでもらいたいと思うが，将来の就職に対する不安感も手伝って，その方向に進むことに前向きな姿勢を示さないこともある。更に，最近の数学に対する社会的軽視は大きな問題となっている。まずは，そのような社会的状況を改めるべく行動し，数学に関心を持つ者をより多く育てることのできる環境を整えることが我々にとって急務であろう。

《参考文献》

〔1〕 数学辞典 第2版 岩波書店
〔2〕「金沢工業大学 ライブラリーセンター」ホームページ