Cramer の連立方程式の利用について

─差積を使った簡単解法─

福田（ふくだ） 仁己（よしみ）

§1 はじめに

Cramer の連立方程式を利用するとき，行列式の値を求めなくても，2 元と 3 元連立 1 次方程式では，差積を求めるだけで簡単に解が求められ，係数がどんな複雑な式でも，差積だけで連立方程式が解けるのです。これを利用して軌跡を求めたり，比を求めたり，ベクトルにも利用できるのです。

ここで，普通は行列式の値を求めるのに，サラスの法則や展開などを使って求めるのであるが，2 次，3 次の行列式の場合は以下のように係数を抜き出して，差積を求めればよいのです。

Cramer の定理

連立方程式 $[P]$ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

について，係数 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ でできる行列式を $|A|=|a_{ij}|$，$|A|$ の第 j 列を $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ でおきかえて得られる行列式を $|A_j|$ とする。このとき，連立方程式 $[P]$ は，$|A|\neq 0$ のときただ 1 組の解

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \cdots\cdots ①$$

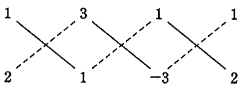
をもつ。

§2 具体的な応用例

2 元の連立方程式の解法

連立方程式 $\begin{cases} x+3y=-1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ を解け。

解答



1−6　　−9−1　　2+3

−5　　−10　　5

分母　　x の分子　　y の分子

$$x=\frac{-10}{-5}=2$$

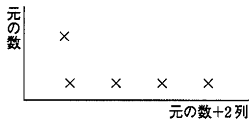
$$y=\frac{5}{-5}=-1$$

2 元の場合は，①の分母，分子が 1 回の作業で求められる。

要領

1° 係数を抜き出して書く。ただし，第 3 列は定数の符号を変えて書く。
　第 4 列には第 1 列を書く。

2° 差積を計算する。



3元の連立方程式の解法

連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+2y+z=5 \\ 9x+3y+z=9 \end{cases}$ を解け。

解答

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 9 & 3 \end{array}$$

$(2+9+12)-(18+3+4)$

$=23-25=-2$ …… 分母

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 9 & 3 \end{array}$$

$(6+9+15)-(18+9+5)$

$=30-32=-2$ …… x の分子

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 9 & 9 & 1 & 9 & 9 \end{array}$$

$(5+27+36)-(45+9+12)$

$=68-66=2$ …… y の分子

$\therefore\ x=\dfrac{-2}{-2}=1,\ y=\dfrac{2}{-2}=-1,\ z=\dfrac{-6}{-2}=3$

要領

1° 係数を抜き出し，3列書く。

2° 右へ第1列と第2列を追加する。

3° 差積を計算する。

x の分子を求めるには

4° x の係数を定数項に変えて 2°，3° を続ける。

5° y，z についても同様にして，差積を計算する。

(z の分子)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 9 & 9 & 3 \end{array}$$

$(18+45+36)-(54+15+36)$

$=99-105=-6$ …… z の分子

注 2元の場合も3元の場合と同じ操作で行列式の値を求められますが，左のように書いてやると，1回の操作で分母と分子が求められ，以下の応用でも使い勝手がいいと思います。

曲線の媒介変数表示

t を媒介変数とする。次の方程式はどんな曲線を表すか。

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

解答

条件式の分母を払って $\begin{cases} (x+1)t^2+0t=-x+1 \\ yt^2 \quad -2t=-y \end{cases}$

右の計算より $t^2=\dfrac{2x-2}{-2x-2}$，$t=\dfrac{-2y}{-2x-2}$

$t^2=(t)^2$ により $\dfrac{2x-2}{-2x-2}=\dfrac{(-2y)^2}{(-2x-2)^2}$

$(2x-2)(-2x-2)=(-2y)^2 \qquad 4x^2+4y^2=4$

よって，円 $x^2+y^2=1$ を表す。

t の存在条件から $-2x-2\neq0$ より $x\neq-1$

$$\begin{array}{cccc} x+1 & 0 & x-1 & x+1 \\ y & -2 & y & y \end{array}$$

$$-2x-2 \qquad 2x-2 \qquad xy-y-xy-y$$

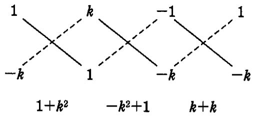
$\therefore\ t^2=\dfrac{2x-2}{-2x-2},\quad t=\dfrac{-2y}{-2x-2}$

軌跡を求める

> 2つの直線 $\ell_1: ky+x-1=0$, $\ell_2: y-kx-k=0$ の交点の軌跡を求めよ。　〔立教大 経済〕

解答

$$\begin{cases} x+ky=1 & \cdots\cdots ① \\ -kx+y=k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

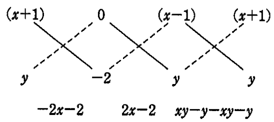


$$\therefore \quad x=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

$$y=\frac{2k}{1+k^2}$$

から

$$\begin{cases} (x+1)k^2+0k=-x+1 \\ yk^2-2k=-y \end{cases}$$



$$\therefore \quad k^2=\frac{2x-2}{-2x-2}$$

$$k=\frac{-2y}{-2x-2}$$

$k^2=(k)^2$ から

$$\frac{2x-2}{-2x-2}=\frac{4y^2}{(-2x-2)^2}$$

よって　$(2x-2)(-2x-2)=4y^4$

$$4x^2+4y^2=4$$

したがって，求める軌跡は

円 $x^2+y^2=1$

ただし，パラメータ k の存在条件より

①から $k=\dfrac{-x+1}{y}$ より　$y\neq 0$

②から $k=\dfrac{y}{x+1}$ より　$x\neq -1$ から

$(x,\ y)\neq(-1,\ 0)$

考え方

直接交点を求めて，そこから k を消去して x，y の関係式を作る。2回 Cramer の連立方程式を使う。

注

{消去したい文字}={変換したい文字}
に分ける。

注　パラメータ k の存在条件に注意

比の求め方

> $3x+2y-3z=0$，$2x-6y-13z=0$ であるとき
> $x:y:z$ を求めよ。〔高知大〕

解答

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & 2 & -3 & 3 & 2 \\
2 & -6 & -13 & 2 & -6 \\
 & & -26-18 & -6+39 & -18-4 \\
 & & -44 & 33 & -22
\end{array}
$$

$\therefore\ x:y:z=(-44):33:(-22)=4:(-3):2$

注　右に第1列と第2列を追加する。
差積は第2列から始める。

外積

> 平面 π の法線ベクトルを $\vec{h}$ とおく。
> $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 1,\ 2)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -1,\ 0)$ の両方に垂直なベクトル $\vec{h}$ の1つを求めよ。

解答

$$
\begin{array}{cccccc}
-4 & 1 & 2 & -4 & 1 \\
-2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\
 & & 0+2 & -4-0 & 4+2 \\
 & & 2 & -4 & 6
\end{array}
$$

法線ベクトルは $\vec{h}=(1,\ -2,\ 3)$

注　比の求め方に同じ。

§3　おわりに

係数がどんな数や式でも係数をそのまま抜き出すだけで差積を計算すれば連立方程式が解けるのです。加減法や代入法より簡単で，数学の苦手な生徒も興味を持ってやっています。応用範囲も広いのです。

《参考文献》

〔1〕 線形代数学演習と解法
増田 勝彦　横井 英雄　共著　廣川書店
〔2〕 1次変換の性質を使った直線の像の簡単解法
福田 仁己　数研通信 No. 24

(大阪府立泉大津高等学校)